Esame di Ricerca Operativa del 15/01/2015

(Cognome)	(Nome)	(Matricola)

Esercizio 1. Un'azienda produce palloni da basket e da calcio che vende rispettivamente a 17 e 22 euro. L'azienda compra ogni settimana 500 m^2 di cuoio e ha bisogno di 14 dm^2 di cuoio per produrre un pallone da calcio e di 16 dm^2 per uno da basket. La produzione di un pallone da calcio richiede 13 minuti di lavoro di una macchina mentre quello da basket ne richiede 9. La macchina a disposizione dell'azienda può lavorare 12 ore al giorno per 5 giorni a settimana. Dovendo produrre almeno 900 palloni da calcio ed almeno 700 da basket, l'azienda vuole determinare la produzione settimanale che massimizza il profitto.

variabili decisionali: modello:

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 - 2\ x_2 \leq 4 \\ -x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{2, 6}	$x =$		
{3, 4}	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{1,2}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 13\ x_1 + 6\ x_2 \\ 16\ x_1 + 9\ x_2 \geq 50 \\ 18\ x_1 + 19\ x_2 \geq 61 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$	taglio:

Esercizio 5. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	20	24	21	32
2		17	30	19
3			22	18
4				25

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

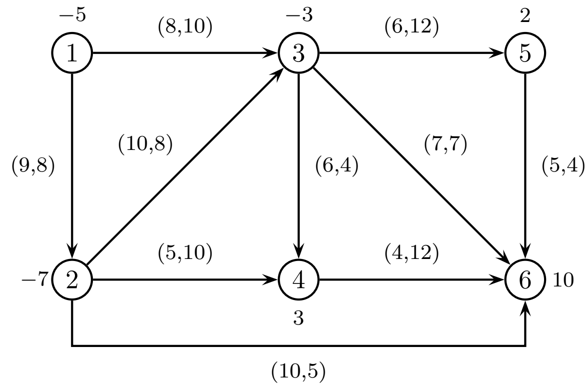
5–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{23}, x_{24}, x_{25}.

Esercizio 6. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

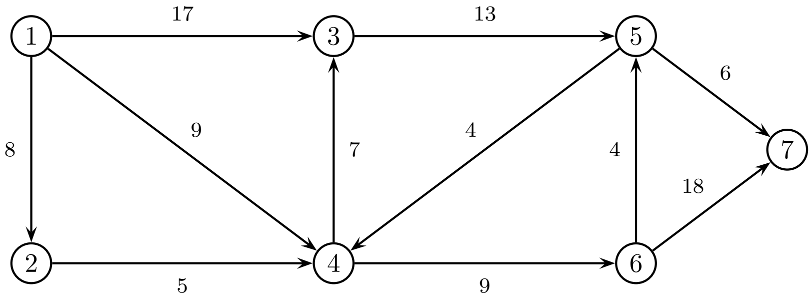


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (2,4) (2,6) (3,5) (5,6)	(2,3) (3,4)	$x =$		
(1,2) (2,4) (3,4) (3,5) (5,6)	(1,3) (3,6)	$\pi = (0,$		

Esercizio 7. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 6.

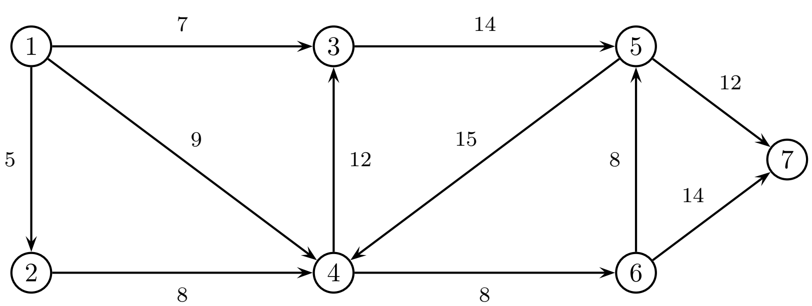
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,6) (3,4) (3,5) (3,6)	
Archi di U	(2,3) (5,6)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 8. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

SOLUZIONI

Esercizio 1.

variabili decisionali: x_B = numero di palloni da basket prodotti, x_C = numero di palloni da calcio prodotti.

modello:

$$\begin{cases} \max\ 17\,x_B + 22\,x_C \\ 16\,x_B + 14\,x_C \leq 50000 \\ 9\,x_B + 13\,x_C \leq 3600 \\ x_B \geq 700 \\ x_C \geq 900 \\ x_B, x_C \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Esercizio 2.

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{2,\ 6\}$	$x = (0,\ -2)$	SI	SI
$\{3,\ 4\}$	$y = (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$	SI	SI

Esercizio 3.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{1,\ 2\}$	$(2,\ 0)$	$(0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$	2	2, 6	3
2° iterazione	$\{1,\ 3\}$	$(2,\ 2)$	$(-2,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$	1	2	4

Esercizio 4.

a) sol. ottima del rilassamento = $\left(0, \dfrac{50}{9}\right)$ $\qquad v_I(P) = 34$

b) sol. ammissibile = $(0, 6)$ $\qquad v_S(P) = 36$

c)

$r = 2 \qquad 15\,x_1 + 8\,x_2 \geq 45$

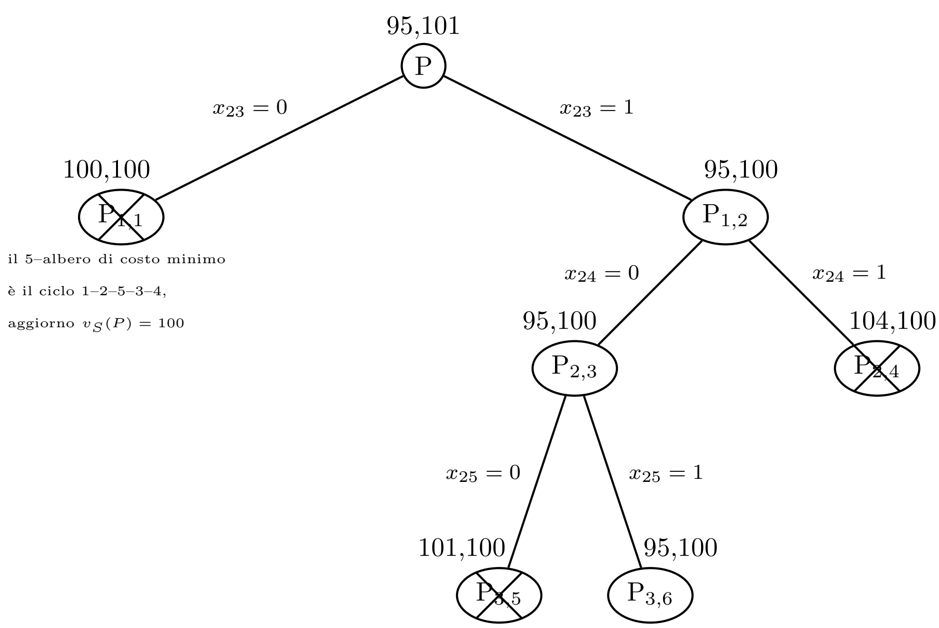
$r = 4 \qquad 15\,x_1 + 8\,x_2 \geq 45$

Esercizio 5.

a) 5–albero: (1 , 2) (1 , 4) (2 , 3) (2 , 5) (3 , 5) $\qquad v_I(P) = 95$

b) ciclo: 1 – 2 – 3 – 5 – 4 $\qquad v_S(P) = 101$

c)



Esercizio 6.

Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (2,4) (2,6) (3,5) (5,6)	(2,3) (3,4)	$x = (5,\ 0,\ 8,\ -1,\ 5,\ 4,\ 7,\ 0,\ 0,\ 5)$	NO	SI
(1,2) (2,4) (3,4) (3,5) (5,6)	(1,3) (3,6)	$\pi = (0,\ 9,\ 8,\ 14,\ 14,\ 19)$	NO	SI

Esercizio 7.

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,6) (3,4) (3,5) (3,6)	(1,2) (1,3) (3,4) (3,5) (3,6)
Archi di U	(2,3) (5,6)	(2,3) (5,6)
x	(5, 0, 8, 0, 4, 3, 6, 2, 0, 4)	(1, 4, 8, 0, 0, 3, 6, 6, 0, 4)
π	(0, 9, 12, 18, 18, 19)	(0, 9, 8, 14, 14, 15)
Arco entrante	(1,3)	(2,3)
ϑ^+, ϑ^-	5 , 4	6 , 1
Arco uscente	(2,6)	(1,2)

Esercizio 8.
a)

	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		4		3		6		5		7	
nodo 2	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1
nodo 3	17	1	17	1	16	4	16	4	16	4	16	4	16	4
nodo 4	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	29	3	22	6	22	6	22	6
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	18	4	18	4	18	4	18	4	18	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	36	6	28	5	28	5
insieme Q	2, 3, 4		3, 4		3, 6		5, 6		5, 7		7		$\emptyset$	

b)

cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 5 - 7	7	(0, 7, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 7, 0, 0)	7
1 - 4 - 6 - 7	8	(0, 7, 8, 0, 7, 0, 8, 0, 7, 0, 8)	15
1 - 4 - 3 - 5 - 7	1	(0, 7, 9, 0, 8, 1, 8, 0, 8, 0, 8)	16
1 - 2 - 4 - 3 - 5 - 7	4	(4, 7, 9, 4, 12, 5, 8, 0, 12, 0, 8)	20

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $N_t = \{6, 7\}$