Esame di Ricerca Operativa del 31/10/17

(Cognome) **(Nome)** **(Numero di Matricola)**

Esercizio 1. Un' azienda deve assegnare settimanalmente a due addetti A_1 e A_2 quattro mansioni lavorative L_1, L_2, L_3 ed L_4 le quali richiedono complessivamente almeno $15, 10, 18$ e 17 ore di attivitá, rispettivamente. L'addetto A_1 ha una retribuzione oraria di $10, 15, 10$ e 20 euro, per L_1, L_2, L_3 ed L_4 rispettivamente, mentre A_2 ha una retribuzione oraria di $12, 10, 8$ e 25 euro (per L_1, L_2, L_3 ed L_4). Inoltre, per contratto, ciascun addetto non puó lavorare piú di 40 ore alla settimana, e, per esigenze di carattere organizzativo, l'esecuzione della mansione L_1 comporta necessariamente l'esecuzione della mansione L_2 da parte di ciascun addetto.

a) Scrivere un problema di programmazione lineare per determinare la quantitá di ore di ciascuna mansione che l'azienda deve assegnare ad ogni addetto, in modo da minimizzare il costo complessivo.

variabili decisionali:

modello:

b) Trasformare il problema del punto a) nella forma primale

$$\begin{cases} \max\ c^\top x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Scrivere la matrice A ed i vettori b e c.

$c^\top =$

$A =$

$b =$

c) Con riferimento al problema definito al punto b), dire se: i) $x = 0$ é una soluzione di base; ii) $x = 0$ é un vertice. Giustificare le risposte.

Esercizio 2. a) Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 4\ x_1 - x_2 \\ 3\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ 3\ x_1 - 2\ x_2 \leq 9 \\ -x_1 + 3\ x_2 \leq 7 \\ -x_1 \leq 1 \\ -3\ x_1 - 2\ x_2 \leq 3 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{4, 6}	$y =$		

b) Dire se $x = (-1, 0)$ é una soluzione di base per il problema precedente. Giustificare la risposta.

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	{5,6}					
Iterazione 2						

Esercizio 4. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema:

$$\begin{cases} \min\ 9\ y_1 + 9\ y_2 + 7\ y_3 + y_4 + 3\ y_5 + 10\ y_6 \\ 3\ y_1 + 3\ y_2 - y_3 - y_4 - 3\ y_5 - 4\ y_6 = -7 \\ y_1 - 2\ y_2 + 3\ y_3 - 2\ y_5 + y_6 = 5 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
Iterazione 1	{1,6}					
Iterazione 2						

Esercizio 5. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 14\ x_1 + 7\ x_2 \\ 10\ x_1 + 9\ x_2 \geq 67 \\ 6\ x_1 + 17\ x_2 \geq 48 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$	taglio:

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) Variabili decisionali:
x_{ij} = quantita' di ore assegnate all'addetto A_i per eseguire la mansione L_j, $i = 1, 2$, $j = 1, .., 4$.

Modello:

$$\begin{cases} \min\ (10x_{11} + 15x_{12} + 10x_{13} + 20x_{14} + 12x_{21} + 10x_{22} + 8x_{23} + 25x_{24}) \\ x_{11} + x_{21} \geq 15 \\ x_{12} + x_{22} \geq 10 \\ x_{13} + x_{23} \geq 18 \\ x_{14} + x_{24} \geq 17 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 40 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 40 \\ x_{12} \geq \alpha x_{11} \\ x_{22} \geq \alpha x_{21} \\ x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2,\ j = 1, .., 4 \end{cases}$$

ove $\alpha \in (0, 1]$ é un'opportuna costante.

b) Poniamo le variabili x_{ij} in ordine lessicografico.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ -18 \\ -17 \\ 40 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} -10 \\ -15 \\ -10 \\ -20 \\ -12 \\ -10 \\ -8 \\ -25 \end{pmatrix}$$

c) i) $x = 0$ é una soluzione di base essendo associata alla matrice di base $-I$ nella formulazione standard del problema definito al punto b).
ii) $x = 0$ non é un vertice essendo non ammissibile per il problema.

Esercizio 2. a) Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 4\ x_1 - x_2 \\ 3\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ 3\ x_1 - 2\ x_2 \leq 9 \\ -x_1 + 3\ x_2 \leq 7 \\ -x_1 \leq 1 \\ -3\ x_1 - 2\ x_2 \leq 3 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (3,\ 0)$	SI	NO
$\{4,\ 6\}$	$y = (0,\ 0,\ 0,\ -6,\ 0,\ 1)$	NO	NO

b) $x = (-1, 0)$ é una soluzione di base associata alle basi $B_1 = \{4, 5\}$, $B_2 = \{4, 6\}$, $B_3 = \{5, 6\}$.

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	$\{5,\ 6\}$	$(-1,\ 0)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 6,\ -11)$	6	$4,\ 1$	2
Iterazione 2	$\{2,\ 5\}$	$(1,\ -3)$	$\left(0,\ \frac{11}{12},\ 0,\ 0,\ -\frac{5}{12},\ 0\right)$	5	$12,\ \frac{204}{7}$	1

Esercizio 4. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema:

$$\begin{cases} \min\ 9\ y_1 + 9\ y_2 + 7\ y_3 + y_4 + 3\ y_5 + 10\ y_6 \\ 3\ y_1 + 3\ y_2 - y_3 - y_4 - 3\ y_5 - 4\ y_6 = -7 \\ y_1 - 2\ y_2 + 3\ y_3 - 2\ y_5 + y_6 = 5 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
Iterazione 1	$\{1,\, 6\}$	$\left(-\frac{1}{7},\ \frac{66}{7}\right)$	$\left(\frac{13}{7},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{22}{7}\right)$	3	$\frac{13}{11},\ \frac{11}{5}$	1
Iterazione 2	$\{3,\, 6\}$	$\left(-\frac{23}{11},\ \frac{18}{11}\right)$	$\left(0,\ 0,\ \frac{13}{11},\ 0,\ 0,\ \frac{16}{11}\right)$	4	$\frac{16}{3}$	6

Esercizio 5. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 14\ x_1 + 7\ x_2 \\ 10\ x_1 + 9\ x_2 \geq 67 \\ 6\ x_1 + 17\ x_2 \geq 48 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \frac{67}{9}\right)$	$v_I(P) = 53$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 8)$	$v_S(P) = 56$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$	$9\,x_1 + 8\,x_2 \geq 60$
$r = 4$	$2\,x_1 + x_2 \geq 8$