Esame di Ricerca Operativa del 22/01/18

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Un'azienda informatica produce tre tipi di processori P_1, P_2, P_3 nelle sedi S_1, S_2, S_3. La capacitá di produzione settimanale delle sedi S_1, S_2, S_3 é data da 1200, 800 e 1400 processori rispettivamente, ed il costo di produzione di un singolo processore di tipo P_i nello stabilimento S_j e' dato da c_{ij}, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$. Sapendo che la produzione settimanale deve essere di almeno 750 processori per ogni tipo e che la produzione dei processori di tipo P_1 nella sede S_3 deve essere inferiore al 60% della produzione dei processori di tipo P_1 nelle sedi S_1 ed S_2, si scriva un problema di programmazione lineare per determinare la quantitá di processori da produrre settimanalmente in ciascuna sede in modo da minimizzare il costo complessivo di produzione.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

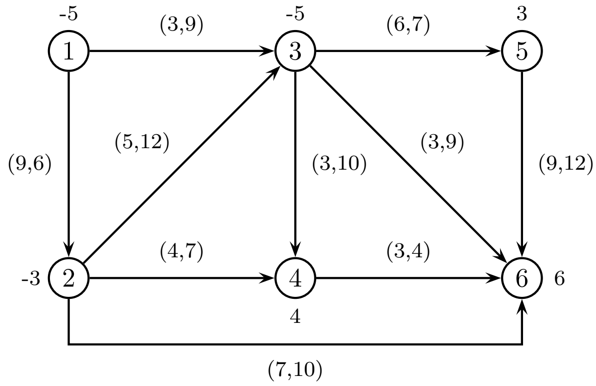
$$\begin{cases} \max\ -4\ x_1 - 7\ x_2 \\ -3\ x_1 - 2\ x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 1 \\ 3\ x_1 - 2\ x_2 \leq 9 \\ 3\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ -x_1 + 3\ x_2 \leq 7 \\ 2\ x_1 + x_2 \leq 16 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{2, 3}	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{4,5}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

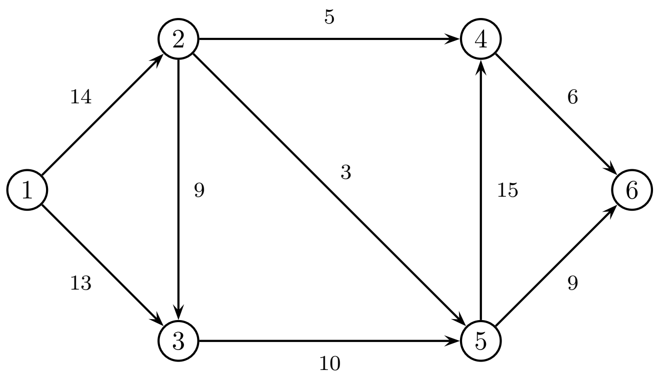


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,3) (3,4) (3,5) (3,6)	(5,6)	$x =$		
(1,2) (1,3) (2,6) (3,4) (5,6)	(2,4)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

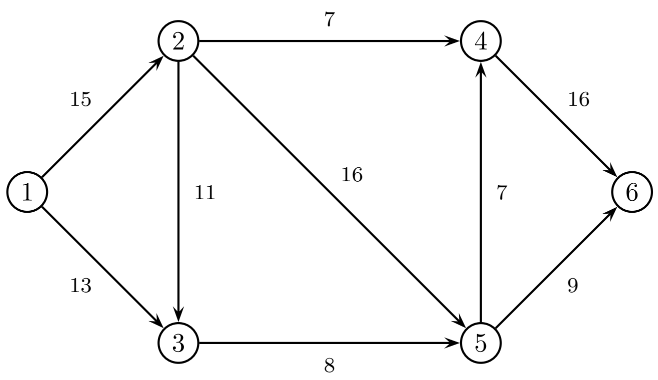
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,3) (2,4) (4,6) (5,6)	
Archi di U	(3,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato												
nodo 2												
nodo 3												
nodo 4												
nodo 5												
nodo 6												
insieme Q												

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 8\ x_1 + 13\ x_2 \\ 16\ x_1 + 5\ x_2 \le 67 \\ 15\ x_1 + 17\ x_2 \le 63 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$	taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	18	23	66	46
2		17	93	60
3			12	15
4				9

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{34}, x_{24}, x_{45}.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

Variabili decisionali:
x_{ij} = quantita' di processori di tipo P_i prodotti settimanalmente nelle sedi S_j, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$;

Modello:

$$\begin{cases} \min \ \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij} \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 1200 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 800 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 1400 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 750 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 750 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 750 \\ x_{13} \leq 0.6\,(x_{11} + x_{12}) \\ x_{ij} \geq 0, \ x_{ij} \in \mathbb{Z}, \ i = 1, 2, 3, \ j = 1, 2, 3, \end{cases}$$

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

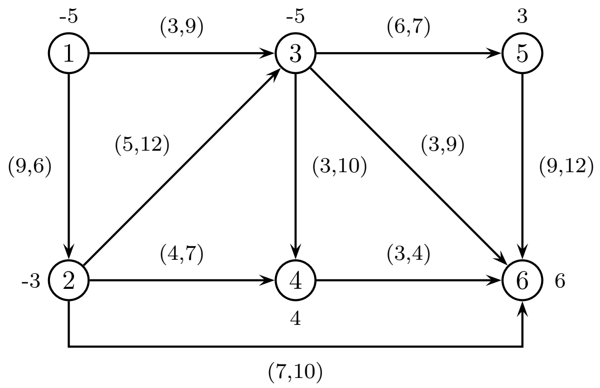
$$\begin{cases} \max \ -4\ x_1 - 7\ x_2 \\ -3\ x_1 - 2\ x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 1 \\ 3\ x_1 - 2\ x_2 \leq 9 \\ 3\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ -x_1 + 3\ x_2 \leq 7 \\ 2\ x_1 + x_2 \leq 16 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x = (-1,\ 0)$	SI	NO
$\{2, 3\}$	$y = \left(0,\ \frac{29}{2},\ \frac{7}{2},\ 0,\ 0,\ 0\right)$	SI	NO

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{4, 5\}$	$(2,\ 3)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ -\frac{19}{10},\ -\frac{17}{10},\ 0\right)$	4	$\frac{150}{11},\ 10$	2
2° iterazione	$\{2, 5\}$	$(-1,\ 2)$	$\left(0,\ \frac{19}{3},\ 0,\ 0,\ -\frac{7}{3},\ 0\right)$	5	$6,\ 24$	1

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

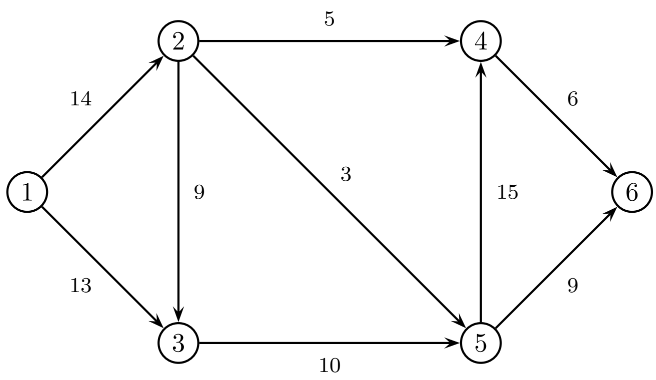


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,3) (3,4) (3,5) (3,6)	(5,6)	$x = (-3,\ 8,\ 0,\ 0,\ 0,\ 4,\ 15,\ -6,\ 0,\ 12)$	NO	NO
(1,2) (1,3) (2,6) (3,4) (5,6)	(2,4)	$\pi = (0,\ 9,\ 3,\ 6,\ 7,\ 16)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

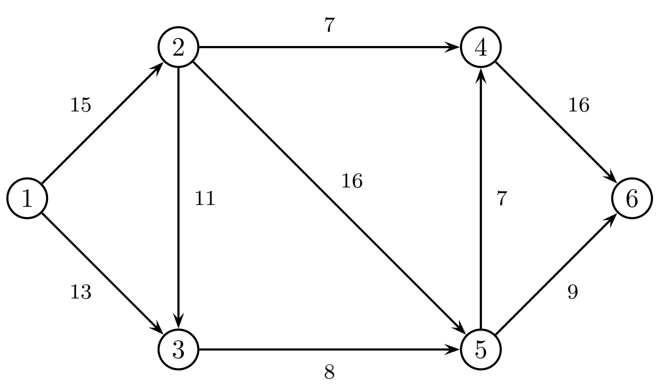
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,3) (2,4) (4,6) (5,6)	(1,2) (1,3) (2,4) (4,6) (5,6)
Archi di U	(3,5)	(3,5)
x	(5, 0, 2, 6, 0, 0, 7, 0, 2, 4)	(3, 2, 0, 6, 0, 0, 7, 0, 2, 4)
π	(0, 9, 14, 13, 7, 16)	(0, 9, 3, 13, 7, 16)
Arco entrante	(1,3)	(3,4)
ϑ^+, ϑ^-	9 , 2	7 , 3
Arco uscente	(2,3)	(1,2)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		2		5		4		6	
nodo 2	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1
nodo 3	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1
nodo 4	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	19	2	19	2	19	2	19	2
nodo 5	$+\infty$	-1	23	3	17	2	17	2	17	2	17	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	26	5	25	4	25	4
insieme Q	2, 3		2, 5		4, 5		4, 6		6		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 2 - 4 - 6	7	(7, 0, 0, 7, 0, 0, 7, 0, 0)	7
1 - 2 - 5 - 6	8	(15, 0, 0, 7, 8, 0, 7, 0, 8)	15
1 - 3 - 5 - 6	1	(15, 1, 0, 7, 8, 1, 7, 0, 9)	16
1 - 3 - 5 - 4 - 6	7	(15, 8, 0, 7, 8, 8, 14, 7, 9)	23

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 3\}$ $N_t = \{2, 4, 5, 6\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 8\ x_1 + 13\ x_2 \\ 16\ x_1 + 5\ x_2 \leq 67 \\ 15\ x_1 + 17\ x_2 \leq 63 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \dfrac{63}{17}\right)$ $v_S(P) = 48$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 3)$ $v_I(P) = 39$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $x_2 \leq 3$
$r = 3$ $5\,x_1 + 6\,x_2 \leq 22$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	18	23	66	46
2		17	93	60
3			12	15
4				9

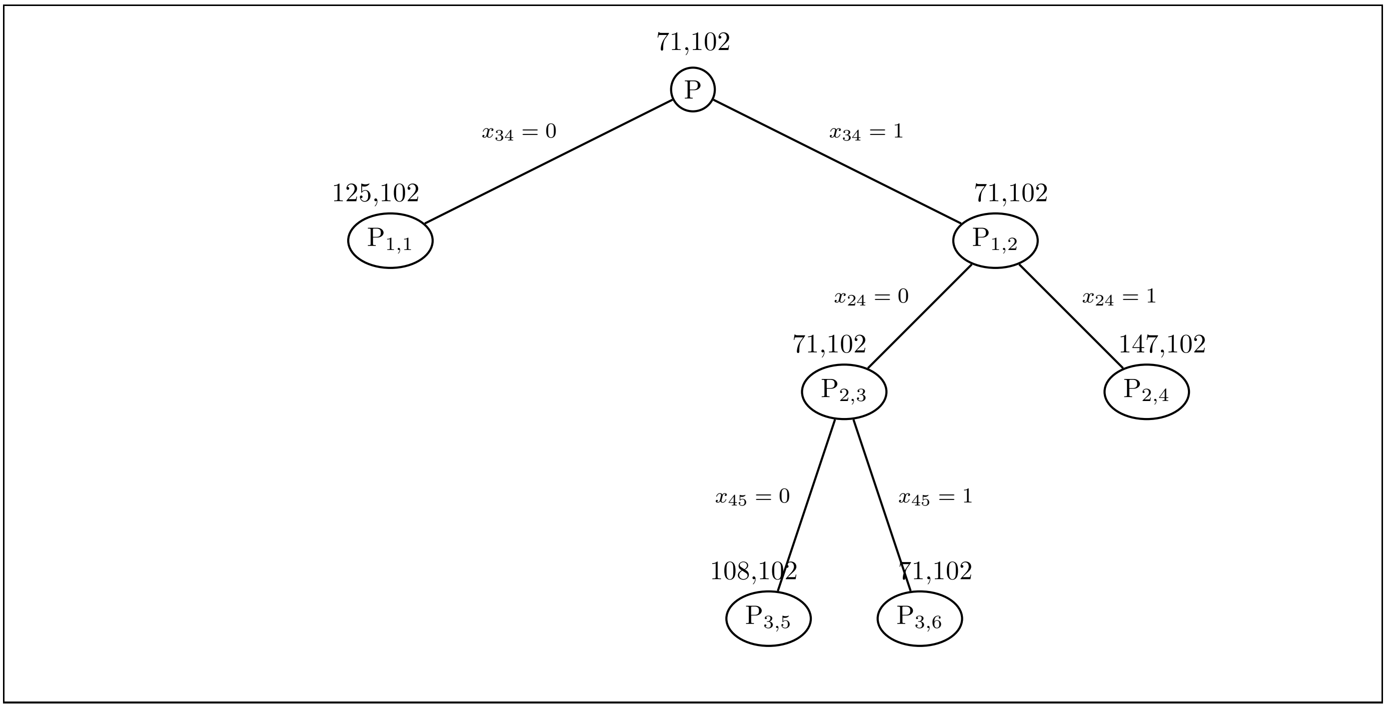
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero: (1 , 2) (2 , 3) (3 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $v_I(P) = 71$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: 2 − 3 − 4 − 5 − 1 $v_S(P) = 102$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{34}, x_{24}, x_{45}.


71,102
P
$x_{34} = 0$
$x_{34} = 1$
125,102
$P_{1,1}$
71,102
$P_{1,2}$
$x_{24} = 0$
$x_{24} = 1$
71,102
$P_{2,3}$
147,102
$P_{2,4}$
$x_{45} = 0$
$x_{45} = 1$
108,102
$P_{3,5}$
71,102
$P_{3,6}$