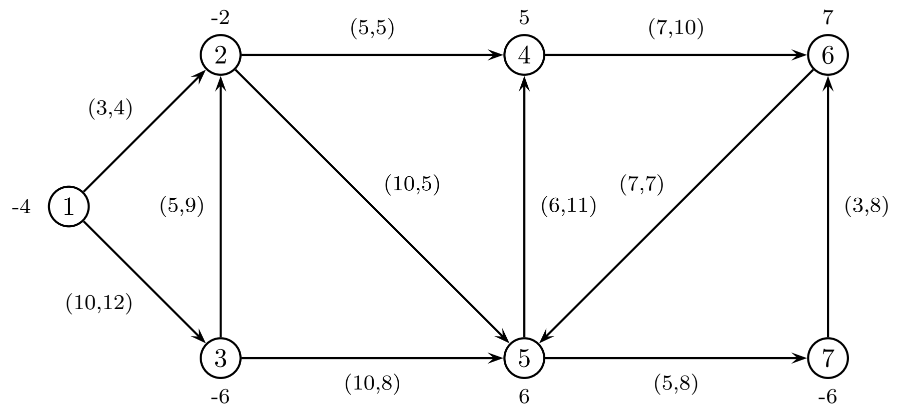
Esame di Ricerca Operativa del 21/12/17

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).



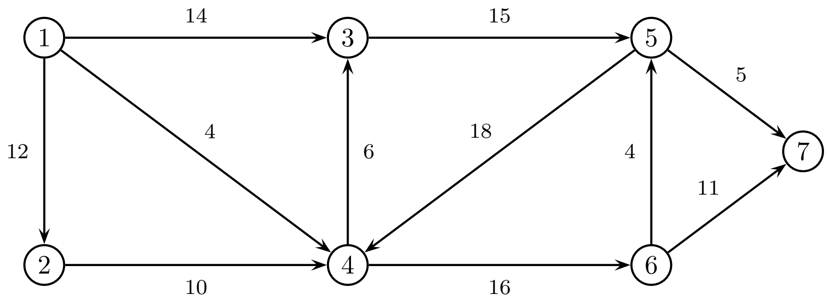
Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (2,5) (3,5) (4,6) (5,7) (6,5)	(5,4)	$x =$		
(1,2) (2,4) (3,5) (5,4) (5,7) (7,6)	(3,2)	$\pi = (0,$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 1.

	1 iterazione	2 iterazione
Archi di T	(1,2) (1,3) (3,5) (4,6) (5,4) (7,6)	
Archi di U	(2,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

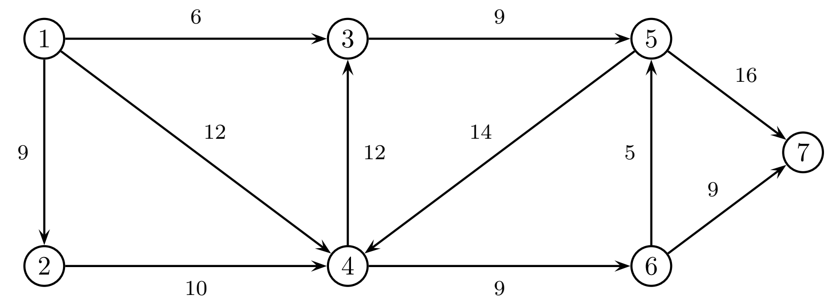
Esercizio 3. Si consideri la rete definita nell'esercizio 1 e la soluzione $\bar{x} = (4, 0, 5, 1, 0, 6, 0, 0, 1, 0, 7)$.
a) Dire se $\bar{x}$ é ammissibile;
b) Dire se $\bar{x}$ e' una soluzione di base.
Giustificare le risposte.

Esercizio 4. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacitá minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 5. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 cittá, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

cittá	**2**	**3**	**4**	**5**
1	16	21	64	46
2		16	91	58
3			10	13
4				7

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: $v_I(P) =$

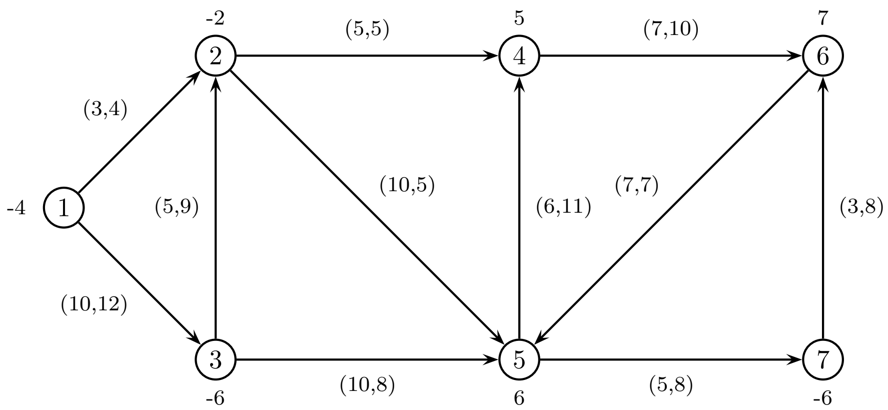
b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{34}, x_{24}, x_{45}.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).



Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (2,5) (3,5) (4,6) (5,7) (6,5)	(5,4)	$x = (0,\ 4,\ 0,\ 2,\ 0,\ 10,\ 6,\ 11,\ -6,\ -1,\ 0)$	NO	NO
(1,2) (2,4) (3,5) (5,4) (5,7) (7,6)	(3,2)	$\pi = (0,\ 3,\ -8,\ 8,\ 2,\ 10,\ 7)$	SI	NO

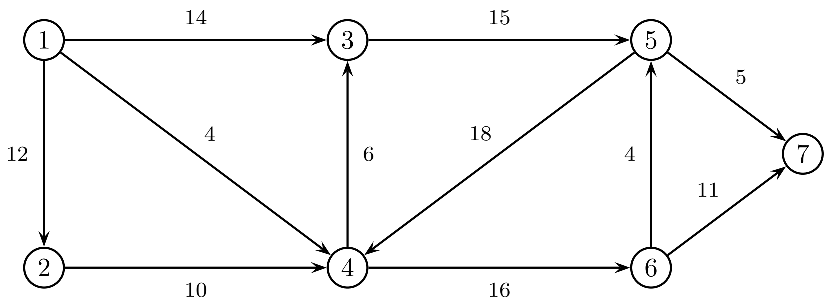
Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 1.

	1 iterazione	2 iterazione
Archi di T	(1,2) (1,3) (3,5) (4,6) (5,4) (7,6)	(1,3) (2,4) (3,5) (4,6) (5,4) (7,6)
Archi di U	(2,5)	(1,2) (2,5)
x	(3, 1, 0, 5, 0, 7, 1, 6, 0, 0, 6)	(4, 0, 1, 5, 0, 6, 1, 5, 0, 0, 6)
π	(0, 3, 10, 26, 20, 33, 30)	(0, 21, 10, 26, 20, 33, 30)
Arco entrante	(2,4)	(2,5)
ϑ^+, ϑ^-	1 , 1	4 , 5
Arco uscente	(1,2)	(2,4)

Esercizio 3. Si consideri la rete definita nell'esercizio 1 e la soluzione $\bar{x} = (4, 0, 5, 1, 0, 6, 0, 0, 1, 0, 7)$.
a) Dire se $\bar{x}$ é ammissibile;
b) Dire se $\bar{x}$ e' una soluzione di base.

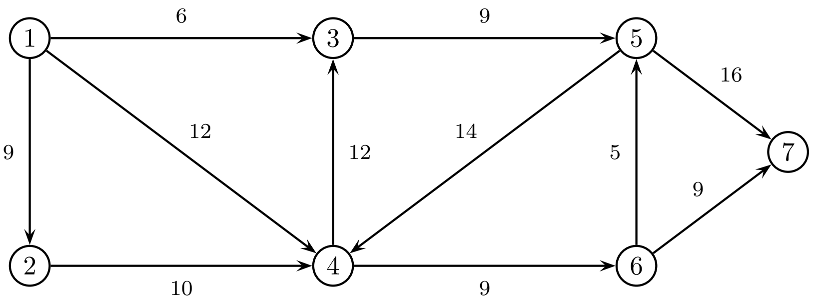
Risposte:
a) $\bar{x}$ é ammissibile in quanto soddisfa i vincoli di bilancio ai nodi e i vincoli di capacitá sugli archi.
b) $\bar{x}$ e' una soluzione di base, in quanto esiste una tripartizione (T, L, U), dell'insieme degli archi, che la genera, ove T sia un albero di copertura per la rete data, L un sottoinsieme di archi a capacitá nulla ed U un sottoinsieme di archi saturi. Possibili tripartizioni sono le seguenti:
1) $T = \{((1, 2), (2, 5), (3, 5), (4, 6), (5, 7), (7, 6)\}, L = \{(1, 3), (3, 2), (5, 4), (6, 5)\}, U = \{(2, 4)\}$;
2) $T = \{((1, 2), (2, 5), (3, 5), (5, 4), (5, 7), (7, 6)\}, L = \{(1, 3), (3, 2), (4, 6), (6, 5)\}, U = \{(2, 4)\}$;
3) $T = \{(1, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 5), (5, 7), (7, 6)\}, L = \{(3, 2), (4, 6), (5, 4), (6, 5)\}, U = \{(1, 2)\}$.

Esercizio 4. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		3		2		6		5		7	
nodo 2	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1
nodo 3	14	1	10	4	10	4	10	4	10	4	10	4	10	4
nodo 4	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	25	3	25	3	24	6	24	6	24	6
nodo 6	$+\infty$	-1	20	4	20	4	20	4	20	4	20	4	20	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	31	6	29	5	29	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		2, 5, 6		5, 6		5, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 5 - 7	6	(0, 6, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 6, 0, 0)	6
1 - 4 - 6 - 7	9	(0, 6, 9, 0, 6, 0, 9, 0, 6, 0, 9)	15
1 - 4 - 3 - 5 - 7	3	(0, 6, 12, 0, 9, 3, 9, 0, 9, 0, 9)	18

Taglio di capacitá minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad N_t = \{5, 6, 7\}$

Esercizio 4. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 cittá, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

cittá	**2**	**3**	**4**	**5**
1	16	21	64	46
2		16	91	58
3			10	13
4				7

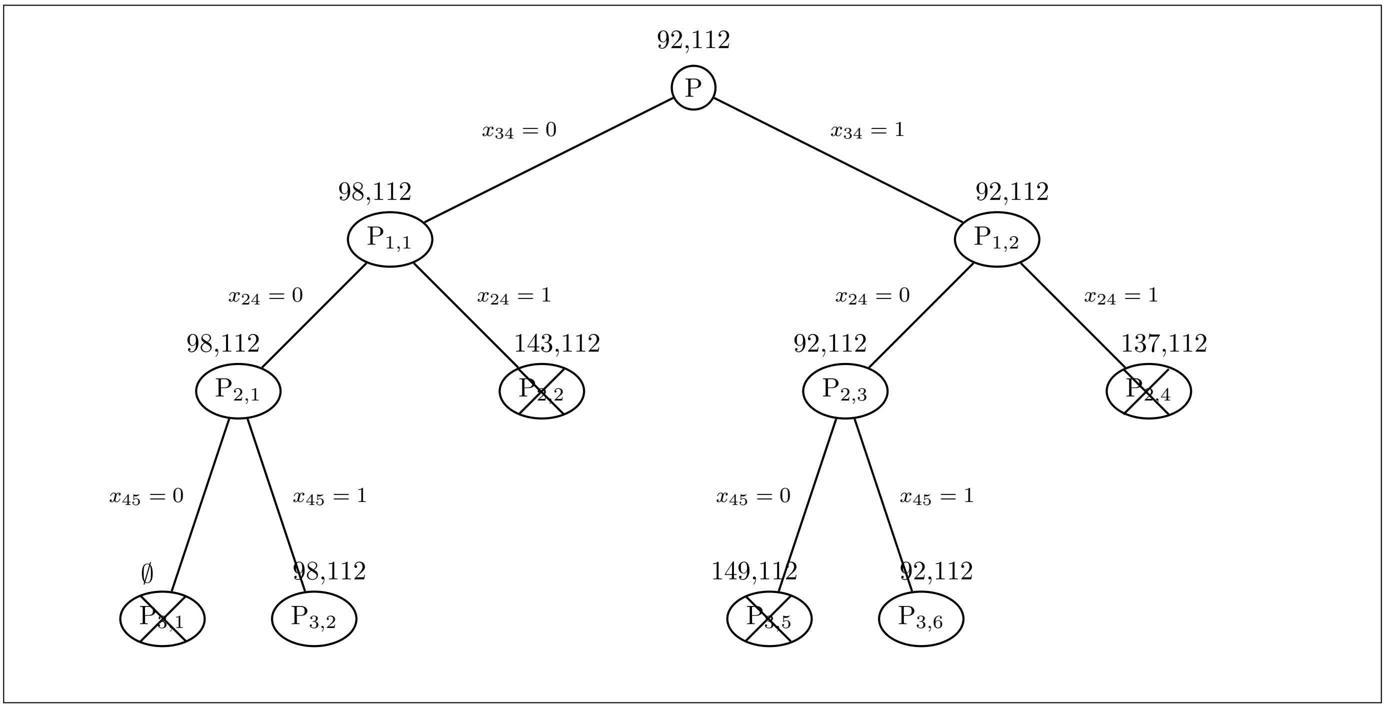
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: (1 , 2) (1 , 5) (3 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $\quad v_I(P) = 92$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $2 - 1 - 3 - 4 - 5$ $\quad v_S(P) = 112$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{34}, x_{24}, x_{45}.


92,112
P
$x_{34} = 0$
$x_{34} = 1$
98,112
$P_{1,1}$
92,112
$P_{1,2}$
$x_{24} = 0$
$x_{24} = 1$
$x_{24} = 0$
$x_{24} = 1$
98,112
$P_{2,1}$
143,112
$P_{2,2}$
92,112
$P_{2,3}$
137,112
$P_{2,4}$
$x_{45} = 0$
$x_{45} = 1$
$x_{45} = 0$
$x_{45} = 1$
$\emptyset$
$P_{3,1}$
98,112
$P_{3,2}$
149,112
$P_{3,5}$
92,112
$P_{3,6}$