Esame di Ricerca Operativa del 16/07/18

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Un terreno agricolo è costituito dalla miscela di tre tipi di terra T_1, T_2 e T_3. Da un'analisi di laboratorio viene rilevata, nei tre tipi di terra, la presenza di sostanze inquinanti, in particolare, amianto (A), ferro (Fe) e piombo (Pb), nelle quantità percentuali indicate nella seguente tabella:

	A	Fe	Pb
T_1	0.5%	4%	2%
T_2	0.2%	4%	0
T_3	1%	0	3%

Si supponga che tutte le sostanze siano misurate in grammi. Viene prelevato dal terreno un campione di 1000 grammi. Sapendo che la quantità di ferro del campione assume valori che variano trà l'1% ed il 2% del peso del campione e che la quantità di piombo non potrà mai superare l' 1.5% del peso del campione, si formuli un problema di programmazione lineare per determinare quale è la quantità massima di amianto che è possibile aspettarsi che sia presente nel campione stesso.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

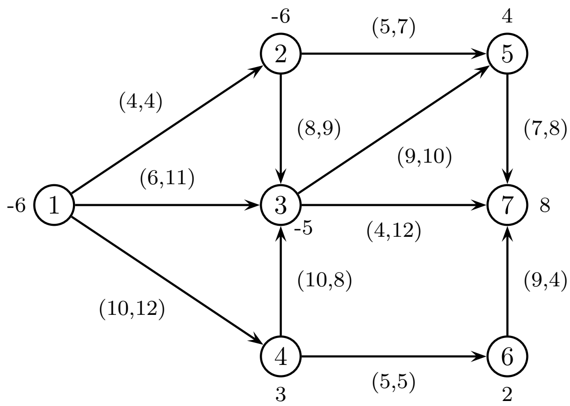
$$\begin{cases} \max\ -5\ x_1 + x_2 \\ 3\ x_1 + x_2 \leq 12 \\ -x_1 + 3\ x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ -2\ x_1 - 3\ x_2 \leq 2 \\ -x_1 - 4\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{1, 3}	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{3,6}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

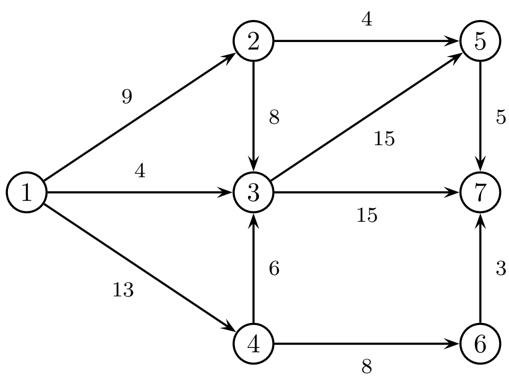


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7)	(1,3)	$x =$		
(1,3) (2,3) (3,5) (4,3) (4,6) (6,7)	(1,4)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

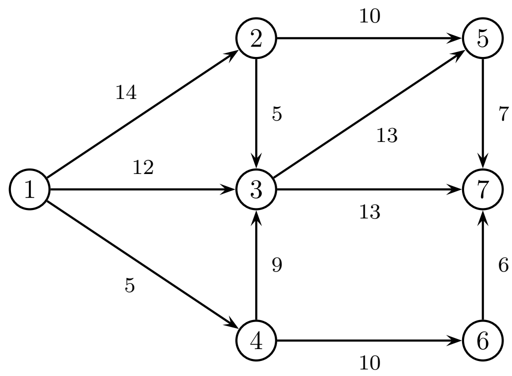
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (4,6) (5,7)	
Archi di U	(2,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 9\ x_1 + 14\ x_2 \\ 18\ x_1 + 6\ x_2 \leq 43 \\ 9\ x_1 + 10\ x_2 \leq 58 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$	taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	30	25	29	47
2		18	94	61
3			54	26
4				20

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{24}, x_{14}, x_{23}.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Variabili decisionali:
x_i = quantitá (in grammi) di terra di tipo T_i, $i = 1, 2, 3$, presente nel campione prelevato;

Modello:

$$\begin{cases} \max \ \frac{1}{100}(0.5x_1 + 0.2x_2 + x_3) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1000 \\ 0.04x_1 + 0.04x_2 \geq 10 \\ 0.04x_1 + 0.04x_2 \leq 20 \\ 0.02x_1 + 0.03x_3 \leq 15 \\ x_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

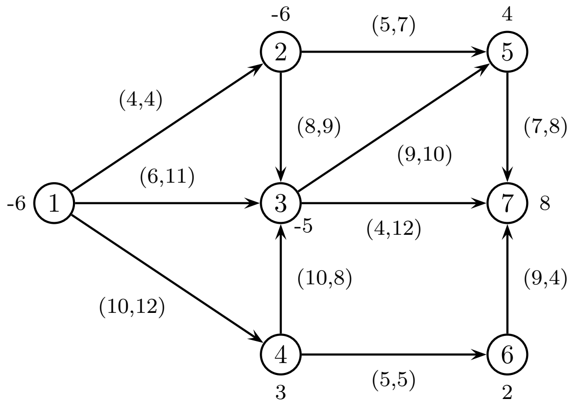
$$\begin{cases} \max \ -5\ x_1 + x_2 \\ 3\ x_1 + x_2 \leq 12 \\ -x_1 + 3\ x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ -2\ x_1 - 3\ x_2 \leq 2 \\ -x_1 - 4\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (3,\ 3)$	SI	NO
$\{1,\ 3\}$	$y = (-1,\ 0,\ -2,\ 0,\ 0,\ 0)$	NO	NO

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{3,\ 6\}$	$(2,\ -2)$	$\left(0,\ 0,\ -\frac{21}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{4}{5}\right)$	3	$10,\ \frac{40}{9},\ 0$	5
2° iterazione	$\{5,\ 6\}$	$(2,\ -2)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{21}{5},\ -\frac{17}{5}\right)$	6	$\frac{70}{9},\ 5$	4

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

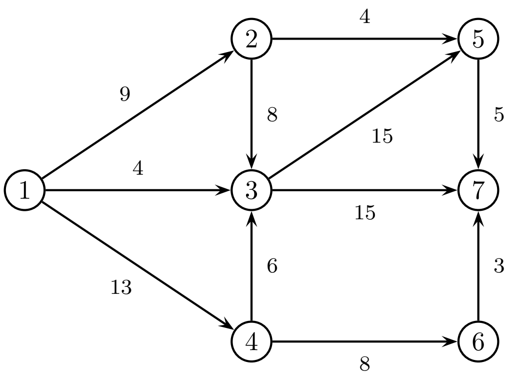


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7)	(1,3)	$x = (-2,\ 11,\ -3,\ 0,\ 4,\ 0,\ 16,\ 0,\ -6,\ 0,\ -8)$	NO	NO
(1,3) (2,3) (3,5) (4,3) (4,6) (6,7)	(1,4)	$\pi = (0,\ -2,\ 6,\ -4,\ 15,\ 1,\ 10)$	NO	SI

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

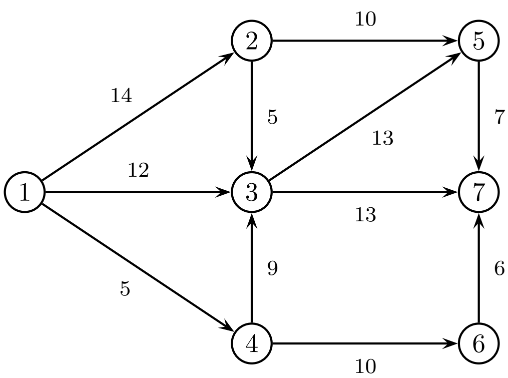
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (4,6) (5,7)	(1,2) (1,3) (1,4) (3,7) (4,6) (5,7)
Archi di U	(2,5)	(2,5)
x	(1, 0, 5, 0, 7, 5, 0, 0, 2, 8, 0)	(1, 0, 5, 0, 7, 0, 5, 0, 2, 3, 0)
π	(0, 4, 6, 10, 15, 15, 22)	(0, 4, 6, 10, 3, 15, 10)
Arco entrante	(3,7)	(2,5)
ϑ^+, ϑ^-	12 , 5	7 , 1
Arco uscente	(3,5)	(1,2)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		2		4		5		7		6	
nodo 2	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1
nodo 3	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
nodo 4	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1
nodo 5	$+\infty$	-1	19	3	13	2	13	2	13	2	13	2	13	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	21	4	21	4	21	4	21	4
nodo 7	$+\infty$	-1	19	3	19	3	19	3	18	5	18	5	18	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 4, 5, 7		4, 5, 7		5, 6, 7		6, 7		6		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	12	(0, 12, 0, 0, 0, 0, 12, 0, 0, 0, 0)	12
1 - 2 - 3 - 7	1	(1, 12, 0, 1, 0, 0, 13, 0, 0, 0, 0)	13
1 - 2 - 5 - 7	7	(8, 12, 0, 1, 7, 0, 13, 0, 0, 7, 0)	20
1 - 4 - 6 - 7	5	(8, 12, 5, 1, 7, 0, 13, 0, 5, 7, 5)	25

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 9\,x_1 + 14\,x_2 \\ 18\,x_1 + 6\,x_2 \leq 43 \\ 9\,x_1 + 10\,x_2 \leq 58 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(0, \dfrac{29}{5}\right)$ $\qquad v_S(P) = 81$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(0, 5)$ $\qquad v_I(P) = 70$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $\qquad x_2 \leq 5$
$r = 3$ $\qquad 3\,x_1 + 4\,x_2 \leq 23$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	30	25	29	47
2		18	94	61
3			54	26
4				20

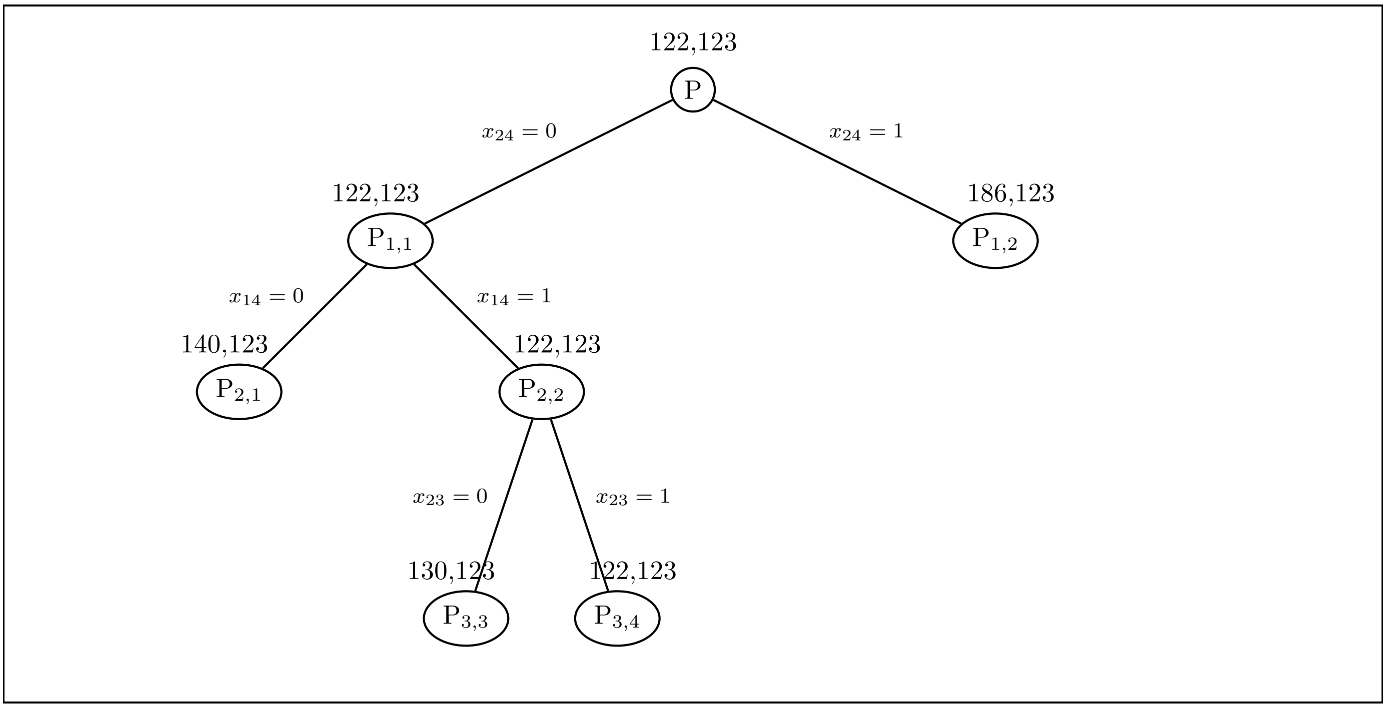
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: (1 , 2) (1 , 3) (1 , 4) (2 , 3) (4 , 5) $\qquad v_I(P) = 122$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: $3 - 2 - 1 - 4 - 5$ $\qquad v_S(P) = 123$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{24}, x_{14}, x_{23}.


122,123
P
$x_{24} = 0$
$x_{24} = 1$
122,123
$P_{1,1}$
186,123
$P_{1,2}$
$x_{14} = 0$
$x_{14} = 1$
140,123
$P_{2,1}$
122,123
$P_{2,2}$
$x_{23} = 0$
$x_{23} = 1$
130,123
$P_{3,3}$
122,123
$P_{3,4}$