**Esame di Ricerca Operativa del 05/09/18**

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di Matricola) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Un'azienda agricola produce mensilmente 50 ettolitri di olio (O) e 60 ettolitri di vino (V) che vengono venduti all'ingrosso (I) e al dettaglio (D) ai seguenti prezzi di vendita in euro al litro:

| | $I$ | $D$ |
|---|---|---|
| $O$ | 3 | 4 |
| $V$ | 2 | 3 |

Per ogni prodotto, la quantità venduta al dettaglio non puo' superare il 50% della quantità complessiva di vino ed olio venduta all'ingrosso. Inoltre, la vendita al dettaglio comporta la presenza di personale che viene stimata nella misura di 0.01h, (h=ore) per ogni litro di prodotto venduto. Sapendo che il personale addetto alla vendita e' disponibile mensilmente al più per 300h, al costo di 8 euro/h, si formuli un problema di programmazione lineare per determinare la quantità di ciascun prodotto da vendere all'ingrosso e al dettaglio in modo da massimizzare il profitto mensile di vendita.

variabili decisionali:

modello:

**Esercizio 2.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

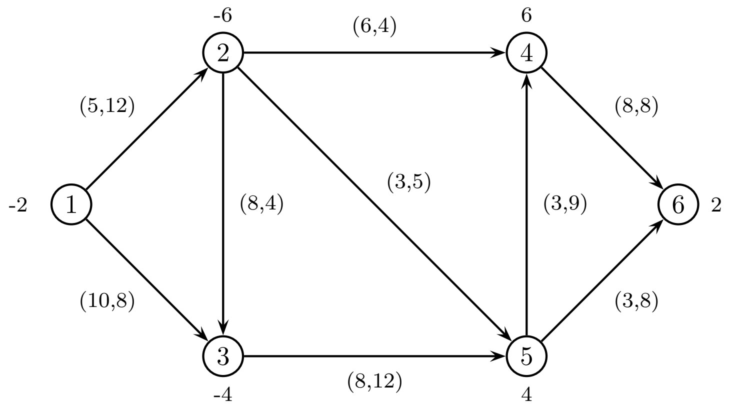
$$
\begin{cases}
\max\ 9\ x_1 + 8\ x_2 \\
-6\ x_1 + 10\ x_2 \leq 17 \\
-2\ x_1 + 2\ x_2 \leq 3 \\
7\ x_1 + 2\ x_2 \leq 28 \\
4\ x_1 - 3\ x_2 \leq 16 \\
-2\ x_1 - 4\ x_2 \leq 3 \\
-2\ x_1 - x_2 \leq 3
\end{cases}
$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| {1, 2} | $x =$ | | |
| {4, 6} | $y =$ | | |

**Esercizio 3.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Iterazione 1 | $\{4{,}5\}$ | | | | | |
| Iterazione 2 | | | | | | |

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

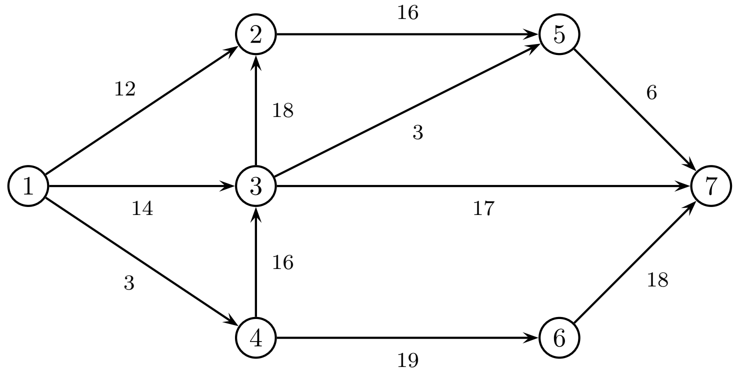



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (2,3) (2,4) (3,5) (4,6) | (2,5) | $x =$ | | |
| (1,2) (1,3) (2,4) (5,4) (5,6) | (2,5) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

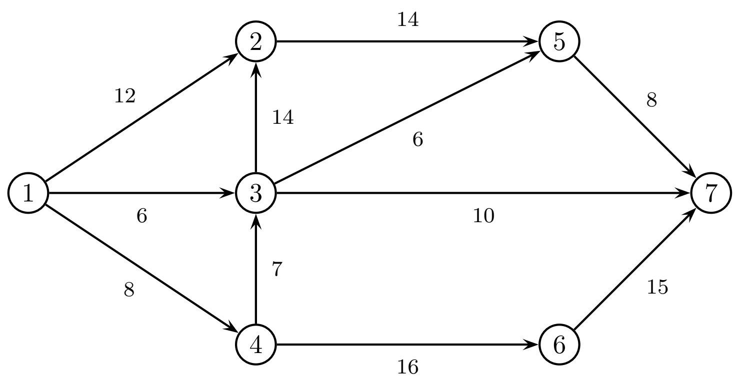
| | Iterazione 1 | Iterazione 2 |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (2,3) (3,5) (4,6) (5,4) | |
| Archi di U | (2,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacitá minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 13\ x_1 + 6\ x_2 \\ 16\ x_1 + 14\ x_2 \geq 51 \\ 5\ x_1 + 13\ x_2 \geq 46 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

| $r =$ | taglio: |
|---|---|

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 30 | 25 | 29 | 47 |
| **2** | | 18 | 94 | 61 |
| **3** | | | 54 | 26 |
| **4** | | | | 20 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 1–albero di costo minimo.

| 1–albero: | $v_I(P) =$ |
|---|---|

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

| ciclo: | $v_S(P) =$ |
|---|---|

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 1–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{24}$, $x_{14}$, $x_{23}$.

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.**

Variabili decisionali:

Si indichino con $i = 1, 2$, l'olio ed il vino rispettivamente, con $j = 1, 2$, la vendita all'ingrosso e al dettaglio, rispettivamente.

Sia $x_{ij}$ = la quantitá (in litri) di prodotto $i$ da vendere mensilmente nella modalità $j$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$;

Modello:

$$\begin{cases} \max\ (3x_{11} + 4x_{12} + 2x_{21} + 3x_{22} - 0.08(x_{12} + x_{22})) \\ x_{11} + x_{12} = 5000 \\ x_{21} + x_{22} = 6000 \\ x_{12} \leq 0.5(x_{11} + x_{21}) \\ x_{22} \leq 0.5(x_{11} + x_{21}) \\ 0.01(x_{12} + x_{22}) \leq 300 \\ x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2,\ j = 1, 2 \end{cases}$$

**Esercizio 2.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

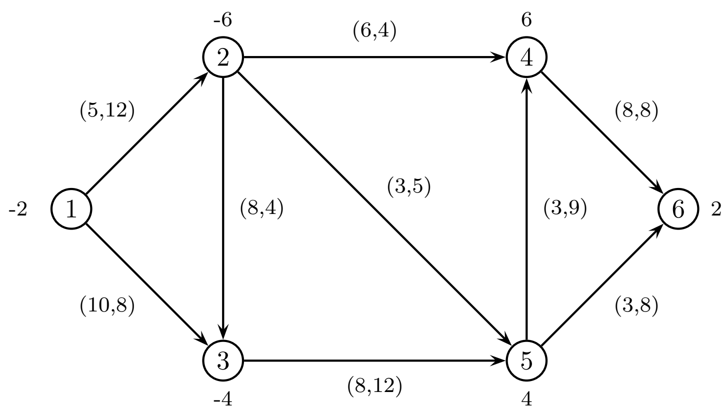
$$\begin{cases} \max\ 9\ x_1 + 8\ x_2 \\ -6\ x_1 + 10\ x_2 \leq 17 \\ -2\ x_1 + 2\ x_2 \leq 3 \\ 7\ x_1 + 2\ x_2 \leq 28 \\ 4\ x_1 - 3\ x_2 \leq 16 \\ -2\ x_1 - 4\ x_2 \leq 3 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 3 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = \left(\frac{1}{2},\ 2\right)$ | SI | NO |
| $\{4,\ 6\}$ | $y = \left(0,\ 0,\ 0,\ -\frac{7}{10},\ 0,\ -\frac{59}{10}\right)$ | NO | NO |

**Esercizio 3.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| iterazione 1 | $\{4,\ 5\}$ | $\left(\frac{5}{2},\ -2\right)$ | $\left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{10}{11},\ -\frac{59}{22},\ 0\right)$ | 5 | $52,\ 132,\ 11$ | 3 |
| iterazione 2 | $\{3,\ 4\}$ | $(4,\ 0)$ | $\left(0,\ 0,\ \frac{59}{29},\ -\frac{38}{29},\ 0,\ 0\right)$ | 4 | $\frac{29}{2},\ \frac{319}{18}$ | 1 |

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

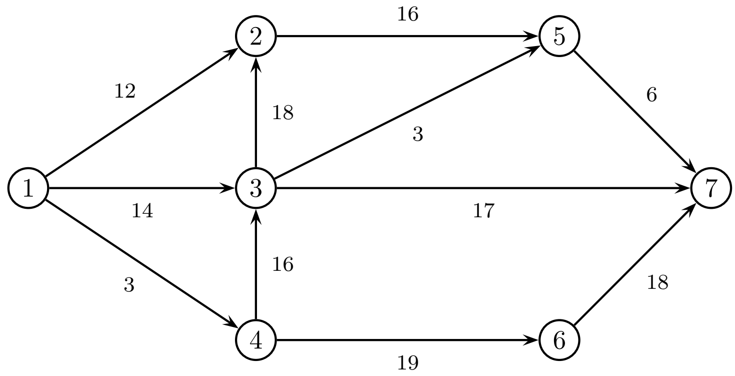



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (2,3) (2,4) (3,5) (4,6) | (2,5) | $x = (2,\ 0,\ -5,\ 8,\ 5,\ -1,\ 2,\ 0,\ 0)$ | NO | NO |
| (1,2) (1,3) (2,4) (5,4) (5,6) | (2,5) | $\pi = (0,\ 5,\ 10,\ 11,\ 8,\ 11)$ | SI | SI |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

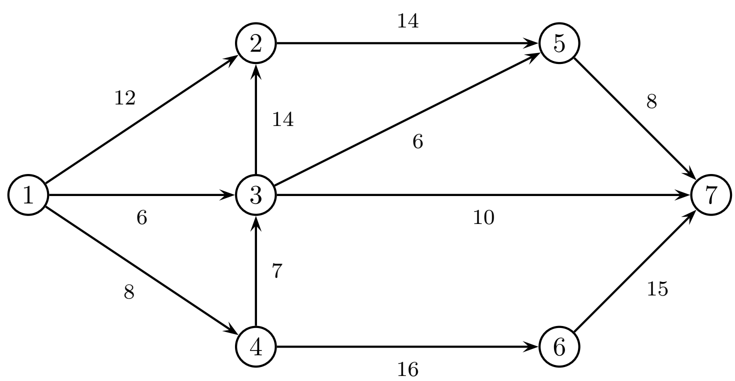
| | iterazione 1 | iterazione 2 |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (2,3) (3,5) (4,6) (5,4) | (1,3) (2,4) (3,5) (4,6) (5,4) |
| Archi di U | (2,5) | (2,5) |
| $x$ | (0, 2, 1, 0, 5, 7, 2, 8, 0) | (0, 2, 0, 1, 5, 6, 2, 7, 0) |
| $\pi$ | (0, 2, 10, 21, 18, 29) | (0, 15, 10, 21, 18, 29) |
| Arco entrante | (2,4) | (1,2) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 4 , 1 | 3 , 2 |
| Arco uscente | (2,3) | (1,3) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 4 | | 2 | | 3 | | 5 | | 6 | | 7 | |
| nodo 2 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 |
| nodo 3 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 |
| nodo 4 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 28 | 2 | 17 | 3 | 17 | 3 | 17 | 3 | 17 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | 22 | 4 | 22 | 4 | 22 | 4 | 22 | 4 | 22 | 4 | 22 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 31 | 3 | 23 | 5 | 23 | 5 | 23 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 3, 6 | | 3, 5, 6 | | 5, 6, 7 | | 6, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 6 | (0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0) | 6 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 8 | (8, 6, 0, 8, 0, 0, 6, 0, 0, 8, 0) | 14 |
| 1 - 4 - 3 - 7 | 4 | (8, 6, 4, 8, 0, 0, 10, 4, 0, 8, 0) | 18 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 4 | (8, 6, 8, 8, 0, 0, 10, 4, 4, 8, 4) | 22 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 5\}$ $\quad N_t = \{3, 4, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 13\ x_1 + 6\ x_2 \\ 16\ x_1 + 14\ x_2 \geq 51 \\ 5\ x_1 + 13\ x_2 \geq 46 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(0, \dfrac{51}{14}\right)$ $\qquad v_I(P) = 22$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(0, 4)$ $\qquad v_S(P) = 24$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $\qquad 15\, x_1 + 13\, x_2 \geq 48$

$r = 4$ $\qquad 2\, x_1 + x_2 \geq 4$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 30 | 25 | 29 | 47 |
| **2** | | 18 | 94 | 61 |
| **3** | | | 54 | 26 |
| **4** | | | | 20 |

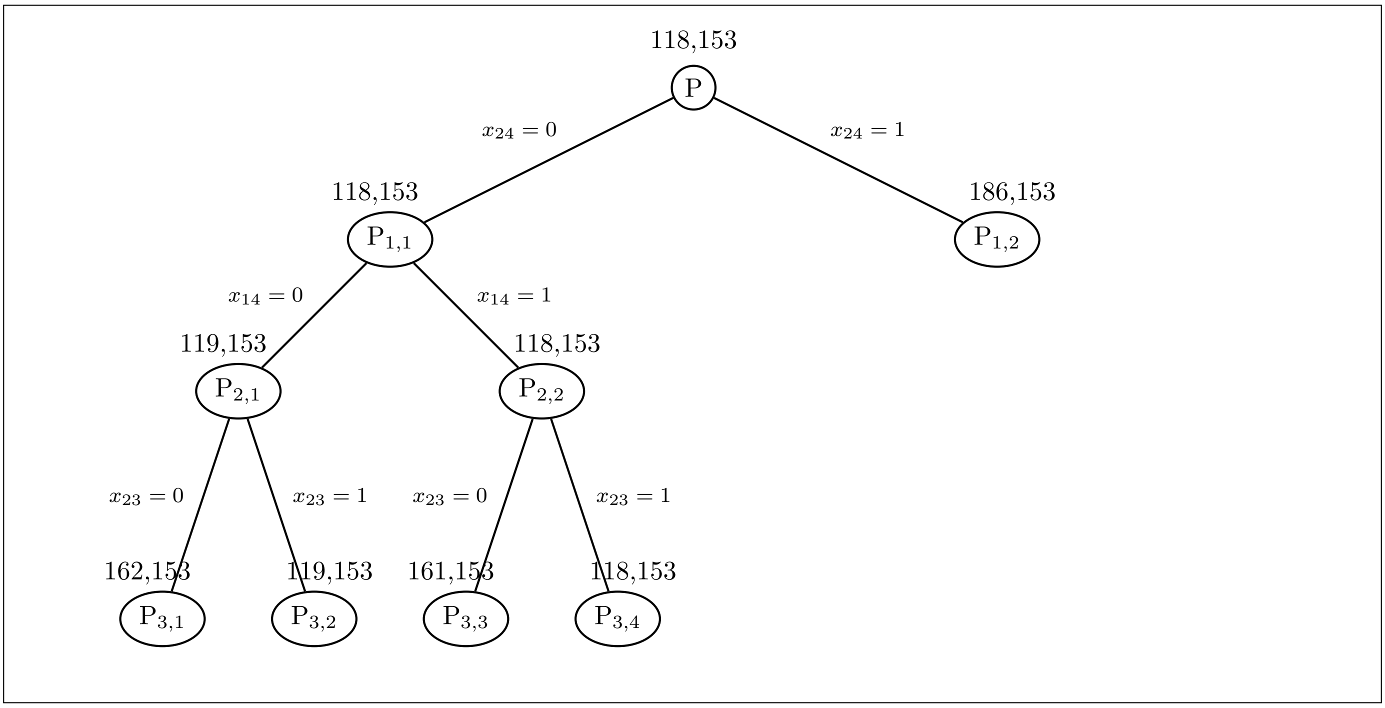
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando l'1–albero di costo minimo.

1–albero: ( 1 , 3 ) ( 1 , 4 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 5 ) ( 4 , 5 ) $\qquad v_I(P) = 118$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: 2 – 3 – 1 – 4 – 5 $\qquad v_S(P) = 153$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando l'1–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{24}$, $x_{14}$, $x_{23}$.



118,153
P
$x_{24} = 0$
$x_{24} = 1$
118,153
$P_{1,1}$
186,153
$P_{1,2}$
$x_{14} = 0$
$x_{14} = 1$
119,153
$P_{2,1}$
118,153
$P_{2,2}$
$x_{23} = 0$
$x_{23} = 1$
$x_{23} = 0$
$x_{23} = 1$
162,153
$P_{3,1}$
119,153
$P_{3,2}$
161,153
$P_{3,3}$
118,153
$P_{3,4}$