

**Corso di Ricerca Operativa B – Esercitazione del 28/10/2015**

**Esercizio 1.** Una ditta produce tre tipi di vernici ( $V_1, V_2, V_3$ ) utilizzando agenti chimici (AC), stabilizzatori (S), addensanti (AD). La tabella seguente riporta le percentuali di ciascun componente necessarie per produrre ogni tipo di vernice:

	AC	S	AD
$V_1$	15	35	10
$V_2$	20	20	15
$V_3$	30	30	20

Mensilmente la ditta ha a disposizione 200 litri di AC, 250 di S e 150 di AD. Sapendo che il profitto ricavato dalla vendita delle tre vernici è rispettivamente di 5, 4 e 6 euro/litro, la ditta vuole trovare la produzione mensile che massimizza il profitto.

- a) Scrivere un modello di programmazione lineare associato al problema.
- b) Trasformare il problema di PL del punto a) nella forma duale standard

$$\begin{cases} \min y^T b \\ y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Scrivere la matrice  $A$  ed i vettori  $b$  e  $c$ .

**Esercizio 2.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max 4x_1 - x_2 \\ x_2 \leq 0 \\ -5x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 5 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 17 \\ x_1 - 3x_2 \leq 15 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 20 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenera (si/no)
{3, 6}	$x =$		
{1, 6}	$y =$		

**Esercizio 3.** Effettuare due iterazioni dell'algorithmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	$x$	$y$	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{2,5}					
2° iterazione						

**Esercizio 4.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il seguente problema:

$$\begin{cases} \min & 5 y_3 + 17 y_4 + 15 y_5 + 20 y_6 \\ & -y_2 + y_3 + 3 y_4 + y_5 + 2 y_6 = 1 \\ & y_1 - 2 y_4 - 3 y_5 - 3 y_6 = -1 \\ & y \geq 0 \end{cases}$$

	Base	$x$	$y$	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{1,5}					
2° iterazione						

**Esercizio 5.** Una ditta deve spedire frigoriferi a tre diverse località ( $L_1, L_2, L_3$ ) avendo a disposizione due magazzini ( $M_1, M_2$ ) dislocati sul territorio nazionale. I magazzini contengono rispettivamente 100 e 110 frigoriferi e le località richiedono rispettivamente 80, 60 e 70 frigoriferi. I costi unitari di trasporto (in euro) sono indicati nella seguente tabella:

	$L_1$	$L_2$	$L_3$
$M_1$	2	5	3
$M_2$	4	7	2

La ditta deve decidere come spedire tutti i frigoriferi in modo da minimizzare il costo di trasporto.

- Scrivere un modello di programmazione lineare intera associato al problema.
- Trasformare il problema di PLI del punto a) nella forma primale standard

$$\begin{cases} \max & c^T x \\ & A x \leq b \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

Scrivere la matrice  $A$  ed i vettori  $b$  e  $c$ .

**Esercizio 6.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max & 6 x_1 + 14 x_2 \\ & 16 x_1 + 13 x_2 \leq 63 \\ & 9 x_1 + 16 x_2 \leq 44 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =

$v_S(P) =$

- Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =

$v_I(P) =$

- Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$

taglio:

## SOLUZIONI

### Esercizio 1.

a) Variabili decisionali:

$y_1$  = litri prodotti di vernice  $V_1$ ,

$y_2$  = litri prodotti di vernice  $V_2$ ,

$y_3$  = litri prodotti di vernice  $V_3$ .

Modello di PL:

$$\begin{cases} \max 5y_1 + 4y_2 + 6y_3 \\ 0.15y_1 + 0.2y_2 + 0.3y_3 \leq 200 \\ 0.35y_1 + 0.2y_2 + 0.3y_3 \leq 250 \\ 0.1y_1 + 0.15y_2 + 0.2y_3 \leq 150 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.35 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.15 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 200 \\ 250 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

### Esercizio 2.

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenera (si/no)
{3, 6}	$x = \left(5, -\frac{10}{3}\right)$	NO	SI
{1, 6}	$y = (5, 0, 0, 0, 0, 2)$	SI	NO

### Esercizio 3.

	Base	$x$	$y$	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{2, 5}	(0, -5)	$\left(0, -\frac{11}{16}, 0, 0, \frac{9}{16}, 0\right)$	2	$80, \frac{80}{3}, 16, \frac{80}{3}$	4
2° iterazione	{4, 5}	(3, -4)	$\left(0, 0, 0, \frac{11}{7}, -\frac{5}{7}, 0\right)$	5	$\frac{28}{3}, 7$	3

**Esercizio 4.**

	Base	$x$	$y$	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{1, 5}	(15, 0)	(2, 0, 0, 0, 1, 0)	3	$\frac{2}{3}, 1$	1
2° iterazione	{3, 5}	$(5, -\frac{10}{3})$	$(0, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0)$	4	$\frac{2}{7}, \frac{1}{2}$	3

**Esercizio 5.**

a) Variabili decisionali:

$x_{ij}$  = numero di frigoriferi spediti dal magazzino  $M_i$  alla località  $L_j$ , con  $i = 1, 2$  e  $j = 1, 2, 3$ .

Modello di PLI:

$$\begin{cases} \min 2x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 7x_{22} + 2x_{23} \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 110 \\ x_{11} + x_{21} = 80 \\ x_{12} + x_{22} = 60 \\ x_{13} + x_{23} = 70 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

b)

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 100 \\ -100 \\ 110 \\ -110 \\ 80 \\ -80 \\ 60 \\ -60 \\ 70 \\ -70 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -3 \\ -4 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 6.**

a) sol. ottima del rilassamento =  $(0, \frac{11}{4})$ ,  $v_S(P) = 38$ .

b) sol. ammissibile =  $(0, 2)$ ,  $v_I(P) = 28$ .

c) Due tagli di Gomory:

$r = 2 \rightarrow$  taglio  $x_2 \leq 2$

$r = 3 \rightarrow$  taglio  $x_1 + 3x_2 \leq 8$ .