Corso di Ricerca Operativa – Esercitazione del 07/10/2015

Esercizio 1. Un'azienda ha a disposizione 2 reparti per produrre due tipi di farina (A e B) per alimentazione animale, che si vendono rispettivamente a 39 e 42 euro al quintale. La produzione della farina di tipo A deve essere compresa tra il 40 ed il 60 per cento del totale. Nella seguente tabella sono indicati i tempi di produzione delle farine (in ore/quintale), le capacità produttive (in ore/settimana) ed il costo (euro/ora) di ogni reparto.

	Tempi di produzione		Capacità	Costo
	Farina A	Farina B	produttiva	
Reparto 1	0.19	0.23	90	2
Reparto 2	0.21	0.18	85	3

Supponendo che tutta le farina prodotta venga venduta, l'azienda deve decidere la pianificazione settimanale della produzione in modo da massimizzare il profitto.

a) Scrivere un modello di programmazione lineare associato al problema.

b) Trasformare il problema di PL del punto a) nella forma primale standard

$$\begin{cases} \max\ c^T x \\ A\,x \leq b \end{cases}$$

Scrivere la matrice A ed i vettori b e c.

Esercizio 2. La compagnia AKEI, oltre che per i mobili low cost, è famosa per le polpette che offre nei suoi ristoranti. Ogni polpetta pesa almeno 100 grammi ed è costituita da carne di manzo, carne di maiale e carne di pollo. Ogni polpetta deve contenere almeno 7 grammi di proteine, almeno 5 grammi di carboidrati e non più di 20 grammi di grassi. Nella tabella seguente sono indicate, per ogni tipo di carne, le percentuali di proteine, carboidrati e grassi contenute ed il costo al grammo.

	Carne di manzo	Carne di maiale	Carne di pollo
Percentuale di proteine	9	7	4
Percentuale di carboidrati	10	8	6
Percentuale di grassi	20	30	10
Costo al grammo	7	3	5

AKEI vuole determinare da quanti grammi di carne di manzo, di maiale e di pollo deve essere costituita ogni polpetta in modo da spendere il meno possibile.

a) Scrivere un modello di programmazione lineare associato al problema.

b) Trasformare il problema di PL del punto a) nella forma duale standard

$$\begin{cases} \min\ y^T b \\ y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Scrivere la matrice A ed i vettori b e c.

Esercizio 3. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -4\ x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 2 \\ -x_2 \leq 0 \\ x_2 \leq 4 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 3\}$	$x =$		
$\{3,\ 4\}$	$y =$		

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 6\ y_1 + 14\ y_3 + 9\ y_4 + 24\ y_5 + 9\ y_7 \\ -y_2 + y_3 + y_4 + 3\ y_5 + y_7 = 7 \\ y_1 + 2\ y_3 + y_4 + 2\ y_5 - y_6 = 9 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{6,\ 7\}$	$x =$		
$\{3,\ 4\}$	$y =$		

SOLUZIONI

Esercizio 1.

a) Variabili decisionali:

x_1 = quintali di farina A prodotti nel reparto 1,

x_2 = quintali di farina B prodotti nel reparto 1,

x_3 = quintali di farina A prodotti nel reparto 2,

x_4 = quintali di farina B prodotti nel reparto 2.

Modello di PL:

$$\begin{cases} \max \ 39\,(x_1+x_3)+42\,(x_2+x_4)-2\,(0.19\,x_1+0.23\,x_2)-3\,(0.21\,x_3+0.18\,x_4) \\ x_1+x_3 \geq 0.4\,(x_1+x_2+x_3+x_4) \\ x_1+x_3 \leq 0.6\,(x_1+x_2+x_3+x_4) \\ 0.19\,x_1+0.23\,x_2 \leq 90 \\ 0.21\,x_3+0.18\,x_4 \leq 85 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} -0.6 & 0.4 & -0.6 & 0.4 \\ 0.4 & -0.6 & 0.4 & -0.6 \\ 0.19 & 0.23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.21 & 0.18 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 90 \\ 85 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 38.62 \\ 41.54 \\ 38.37 \\ 41.46 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2.

a) Variabili decisionali: y_1 = grammi di manzo, y_2 = grammi di maiale, y_3 = grammi di pollo.

Modello di PL:

$$\begin{cases} \min \ 7\,y_1+3\,y_2+5\,y_3 \\ y_1+y_2+y_3 \geq 100 \\ 0.09\,y_1+0.07\,y_2+0.04\,y_3 \geq 7 \\ 0.1\,y_1+0.08\,y_2+0.06\,y_3 \geq 5 \\ 0.2\,y_1+0.3\,y_2+0.1\,y_3 \leq 20 \\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.09 & 0.1 & 0.2 \\ 1 & 0.07 & 0.08 & 0.3 \\ 1 & 0.04 & 0.06 & 0.1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 100 \\ 7 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Il problema è nella forma primale standard

$$\begin{cases} \max \ c^T x \\ A\,x \leq b \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Data la base $B = \{1, 3\}$, si ha

$$A_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad A_N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b_N = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

L'inversa della matrice di base è $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, quindi la soluzione di base primale è

$$x = A_B^{-1}\, b_B = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Poiché $A_N\, x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \leq b_N$, il punto x è ammissibile. Inoltre, x è degenere perché $A_6\, x = b_6$.

Data la base $B = \{3, 4\}$, si ha

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad A_N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b_N = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

L'inversa della matrice di base è $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, quindi la soluzione di base duale è

$$y_B^T = c^T A_B^{-1} = (-4 \quad -1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (-1 \quad -3)\,.$$

Poiché $y \not\geq 0$, il punto y non è ammissibile. Inoltre, y non è degenere perché $y_3 \neq 0$ e $y_4 \neq 0$.

Esercizio 4. Il problema è nella forma duale standard

$$\begin{cases} \min\ y^T b \\ y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 14 \\ 9 \\ 24 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Data la base $B = \{6, 7\}$, si ha

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad A_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b_N = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 14 \\ 9 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

L'inversa della matrice di base è $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, quindi la soluzione di base primale è

$$x = A_B^{-1}\, b_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $A_N\, x = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 9 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix} \not\leq b_N$, il punto x non è ammissibile. Inoltre, x è degenere perché $A_4\, x = b_4$.

Data la base $B = \{3, 4\}$, si ha

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b_B = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad A_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_N = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 24 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

L'inversa della matrice di base è $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, quindi la soluzione di base duale è

$$y_B^T = c^T A_B^{-1} = (7 \quad 9) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (2 \quad 5)\,.$$

Poiché $y \geq 0$, il punto y è ammissibile. Inoltre, y non è degenere perché $y_3 \neq 0$ e $y_4 \neq 0$.