

(Cognome)

(Nome)

(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Un'azienda produttrice di mobili possiede due sedi S_1 e S_2 , che richiedono mensilmente 30 e 40 quintali di legname per il processo produttivo. Il legname è conservato in tre depositi D_1, D_2, D_3 , di proprietà dell'azienda, nelle quantità di 20, 25 e 35 quintali, rispettivamente. Nella seguente tabella sono riportati i costi di trasporto (in euro per quintale) del legname, dal deposito D_i alla sede S_j , $i = 1, 2, 3, j = 1, 2$.

	S_1	S_2
D_1	10	8
D_2	6	12
D_3	14	10

Sapendo che il costo di giacenza mensile del legname nei depositi D_1, D_2 e D_3 é di 3, 4 e 2 euro a quintale, rispettivamente, si formuli un problema di programmazione lineare per minimizzare il costo complessivo mensile di trasferimento del legname richiesto dalle sedi e di giacenza del legname rimanente nei depositi.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

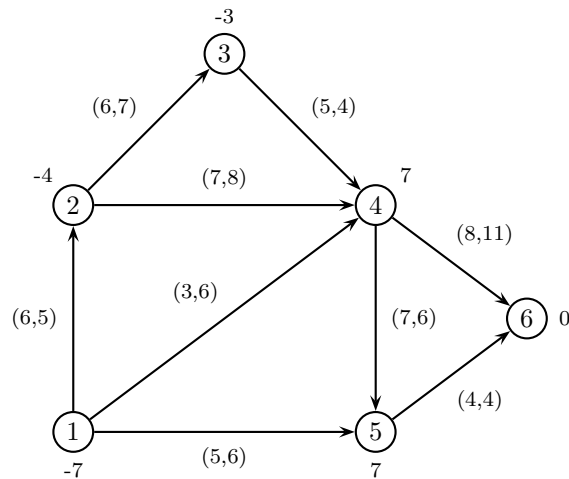
$$\begin{cases} \max & 2x_1 - 3x_2 \\ & -x_1 - x_2 \leq 6 \\ & -2x_1 - x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq -5 \\ & -x_1 + x_2 \leq -7 \\ & x_1 - x_2 \leq 12 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenerare (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{1, 3}	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{2,4}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

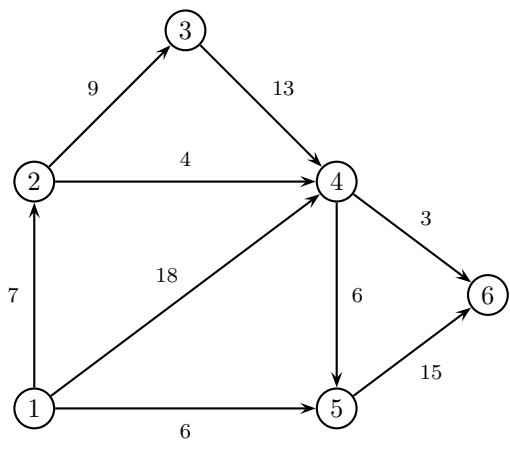


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenera (si/no)
(1,5) (2,4) (3,4) (4,6) (5,6)	(2,3)	$x =$		
(1,5) (2,3) (2,4) (4,5) (5,6)	(3,4)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

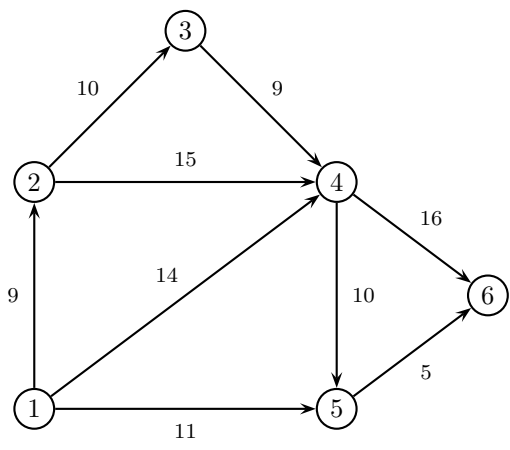
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,5) (3,4) (4,5) (4,6)	
Archi di U	(2,4)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato												
nodo 2												
nodo 3												
nodo 4												
nodo 5												
nodo 6												
insieme Q												

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max & 5x_1 + 14x_2 \\ & 17x_1 + 13x_2 \leq 61 \\ & 9x_1 + 19x_2 \leq 65 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_S(P) =$
--------------------------------	------------

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_I(P) =$
--------------------	------------

c) Calcolare un taglio di Gomory.

r =	taglio:
-----	---------

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	2	3	4	5
1	16	21	64	46
2		16	59	58
3			98	11
4				10

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3-albero di costo minimo.

3-albero:	$v_I(P) =$
-----------	------------

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo:	$v_S(P) =$
--------	------------

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3-albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{45} , x_{34} , x_{35} .

SOLUZIONI

Esercizio 1.

Variabili decisionali:

x_{ij} = quantità (in quintali) di legname da trasferire mensilmente dal deposito D_i alla sede S_j , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$;

Il costo di trasferimento del legname è: $10x_{11} + 8x_{12} + 6x_{21} + 12x_{22} + 14x_{31} + 10x_{32}$.

Il costo di giacenza del legname rimanente nei depositi è:

$3(20 - x_{11} - x_{12}) + 4(25 - x_{21} - x_{22}) + 2(35 - x_{31} - x_{32})$.

Modello:

$$\begin{cases} \min (230 + 7x_{11} + 5x_{12} + 2x_{21} + 8x_{22} + 12x_{31} + 8x_{32}) \\ x_{11} + x_{12} \leq 20 \\ x_{21} + x_{22} \leq 25 \\ x_{31} + x_{32} \leq 35 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40 \\ x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2 \end{cases}$$

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

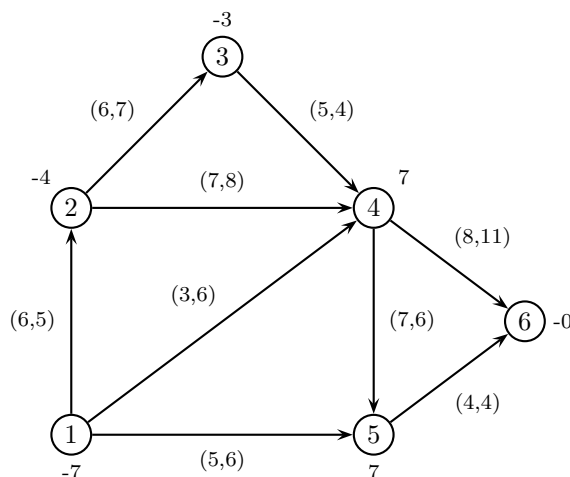
$$\begin{cases} \max 2x_1 - 3x_2 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -2x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq -5 \\ -x_1 + x_2 \leq -7 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenera (si/no)
{1, 2}	$x = (2, -8)$	SI	NO
{1, 3}	$y = (-7, 0, -5, 0, 0, 0, 0)$	NO	NO

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{2, 4}	(1, -6)	$(0, \frac{1}{3}, 0, -\frac{8}{3}, 0, 0, 0)$	4	3, 5, 12	1
2° iterazione	{1, 2}	(2, -8)	(8, -5, 0, 0, 0, 0, 0)	2	1, 3	5

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

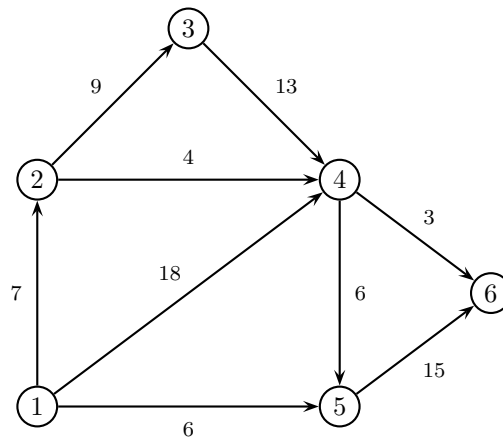


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenera (si/no)
(1,5) (2,4) (3,4) (4,6) (5,6)	(2,3)	$x = (0, 0, 7, 7, -3, 10, 0, 0, 0)$	NO	SI
(1,5) (2,3) (2,4) (4,5) (5,6)	(3,4)	$\pi = (0, -9, -3, -2, 5, 9)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

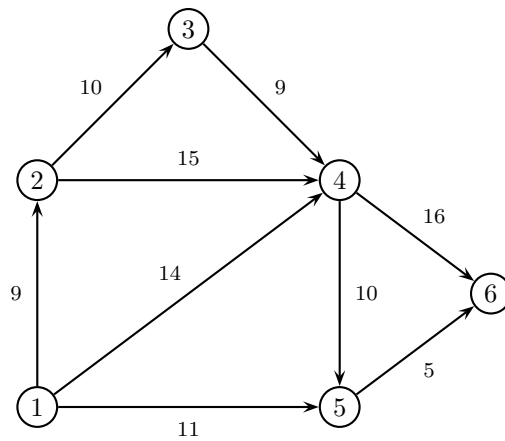
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,5) (3,4) (4,5) (4,6)	(1,2) (2,4) (3,4) (4,5) (4,6)
Archi di U	(2,4)	(1,5)
x	(4, 0, 3, 0, 8, 3, 4, 0, 0)	(1, 0, 6, 0, 5, 3, 1, 0, 0)
π	(0, 6, -7, -2, 5, 6)	(0, 6, 8, 13, 20, 21)
Arco entrante	(2,4)	(1,4)
ϑ^+, ϑ^-	3, 4	6, 1
Arco uscente	(1,5)	(1,2)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		5		2		4		6		3	
nodo 2	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1
nodo 3	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	16	2	16	2	16	2	16	2
nodo 4	18	1	18	1	11	2	11	2	11	2	11	2
nodo 5	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 6	$+\infty$	-1	21	5	21	5	14	4	14	4	14	4
insieme Q	2, 4, 5		2, 4, 6		3, 4, 6		3, 6		3		\emptyset	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 4 - 6	14	(0, 14, 0, 0, 0, 0, 0, 14, 0)	14
1 - 5 - 6	5	(0, 14, 5, 0, 0, 0, 0, 14, 5)	19
1 - 2 - 4 - 6	2	(2, 14, 5, 0, 2, 0, 0, 16, 5)	21

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $N_t = \{6\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max 5x_1 + 14x_2 \\ 17x_1 + 13x_2 \leq 61 \\ 9x_1 + 19x_2 \leq 65 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(-0, \frac{65}{19}\right)$	$v_S(P) = 47$
---	---------------

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(-0, 3)$	$v_I(P) = 42$
------------------------------	---------------

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$	$x_2 \leq 3$	
$r = 3$	$x_1 + 3x_2 \leq 10$	

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	2	3	4	5
1	16	21	64	46
2		16	59	58
3			98	11
4				10

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3-albero di costo minimo.

3-albero: $(1, 2) (1, 5) (2, 3) (3, 5) (4, 5)$	$v_I(P) = 99$
--	---------------

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $1 - 2 - 3 - 5 - 4$	$v_S(P) = 117$
----------------------------	----------------

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3-albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{45}, x_{34}, x_{35} .

