11. IL PROBLEMA DEL FLUSSO DI COSTO MINIMO CAPACITATO

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ex = b \\ 0 \le x \le U \end{cases} \qquad (11.1)$$

Scrivendo il vincolo $x \le U$, come $x + w = U$, $w \ge 0$ otteniamo la formulazione in forma duale standard

$$(11.2) \qquad \begin{cases} \min c^T x \\ Ex = b \\ x + w = U \\ x \ge 0,\ w \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \min c^T x \\ \begin{pmatrix} E & 0 \\ I_m & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ U \end{pmatrix} \\ x \ge 0,\ w \ge 0 \end{cases}$$

Sia $M = \begin{pmatrix} E & 0 \\ I_m & I_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times 2m}$

Vogliamo determinare una base associata a (11.2) ed una sottomatrice M_B di ordine $(n+m) \times (n+m-1)$ tale che $rk(M_B) = n+m-1$

A tale scopo consideriamo una tripartizione (T, L, U) dell'insieme A, in modo che T sia un albero di copertura di G.

Pertanto $x^T = (x_T^T, x_L^T, x_U^T)$ e sia (T', L', U') la analoga partizione delle variabile w, ossia $w^T = (w_{T'}^T, w_{L'}^T, w_{U'}^T)$

<u>PROPOSIZIONE</u>: Sia $B = (T, U, T', L')$ ove $G(N, T)$ è un albero di copertura di G, allora la matrice M_B ha rango $rk(M_B) = n+m-1$

Pertanto una s.b. associata a (11.2) viene determinata risolvendo il sistema

$$M_B \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} b \\ u \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} x_L \\ w_{U'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Essendo

$$M = \begin{pmatrix} E_T & E_L & E_U & 0 & 0 & 0 \\ I_T & & & I_{T'} & & \\ & I_L & & & I_{L'} & \\ & & I_U & & & I_{U'} \end{pmatrix}$$

avremo che

$$M_B = \begin{pmatrix} E_T & E_U & 0 & 0 \\ I_T & 0 & I_{T'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{L'} \\ 0 & I_U & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$M_B \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} E_T & E_U & 0 & 0 \\ I_T & 0 & I_{T'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{L'} \\ 0 & I_U & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_T \\ x_U \\ w_{T'} \\ w_{L'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ u_T \\ u_L \\ u_U \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} E_T x_T + E_U x_U = b \\ x_T + w_{T'} = u_T \\ w_{L'} = u_L \\ x_U = u_U \end{cases}$$

In particolare il sistema

$$\begin{cases} E_T x_T = b - E_U u_U \\ x_L = 0 \\ x_U = u_U \end{cases} \tag{11.3}$$

fornisce la soluzione $\bar{x}$. Il problema duale di (11.2) è

$$\begin{cases} \max(\pi^T b + \mu^T u) \\ \pi^T E + \mu^T \le c^T \\ \mu^T \le 0 \end{cases}$$

Le soluzioni duali complementari a $\overline{x}$ soddisfano il sistema $(\pi^T, \mu^T) M_B = (c_B^T, 0)_B$

$$(\pi^T, \mu_T^T, \mu_L^T, \mu_U^T) \begin{pmatrix} E_T & E_U & 0 & 0 \\ I_T & 0 & I_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{L'} \\ 0 & I_U & 0 & 0 \end{pmatrix} = (c_T^T, c_U^T, 0_{T'}, 0_{L'})$$

osservando che $\mu^T = (\mu_T^T, \mu_L^T, \mu_U^T)$

ossia

$$\begin{cases} \pi^T E_T + \mu_T^T I_T = c_T^T \\ \pi^T E_U + \mu_U^T = c_U^T \\ \mu_T^T = 0 \\ \mu_L^T = 0 \end{cases} \Big/\!\Big/ \begin{cases} \overline{\pi}^T E_T = c_T^T \\ \mu_U^T = c_U^T - \pi^T E_U \\ \mu_T^T = 0 \\ \mu_L^T = 0 \end{cases}$$

Segue che (π^T, μ^T) è ammissibile se inoltre

$$\begin{cases} \pi^T E_L + \mu_L^T \leq c_L^T \\ \mu_U^T \leq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \pi^T E_T = c_T^T \\ \pi^T E_L \leq c_L^T \\ \pi^T E_U \geq c_U^T \end{cases} \quad (11.4)$$

ove la terza relazione segue dal fatto che

$$0 \geq \mu_U = c_U^T - \pi^T E_U .$$

TEOREMA Si consideri una tripartizione (T, L, U) dell'insieme A ove T è un albero di copertura. Sia $\overline{x}^T = (x_T^T, x_L^T, x_U^T)$ una soluzione del sistema (11.3) tale che $0 \leq x_T \leq U_T$. Allora se esiste $\overline{\pi} \in \mathbb{R}^m$ tale che $\overline{\pi}^T E_T = c_T^T$ ed inoltre

(11.5) $\quad \overline{\pi}^T E_L \leq c_L^T \quad , \quad \overline{\pi}^T E_U \geq c_U^T$, si ha che $\overline{x}$ è soluzione ottima di (11.1).

OSSERVAZIONE: (11.5) è equivalente a

$$\overline{c}_{ij} \geq 0 \;,\; (i,j) \in L \quad , \quad \overline{c}_{ij} \leq 0 \;,\; (i,j) \in U$$

ove $\overline{c}_{ij} := c_{ij} + \pi_i - \pi_j$.

Il seguente teorema fornisce una proprietà fondamentale del problema del flusso di costo minimo

TEOREMA: Se i vettori u e b sono a componenti intere, allora le soluzioni di base di (11.2) sono a componenti intere.

OSSERVAZIONE: La regione ammissibile del problema (11.1) è un insieme chiuso e limitato (per via dei vincoli di capacità). Pertanto il problema (11.1) ammette sempre ottimo finito se la regione ammissibile è non vuota.