11. IL PROBLEMA DEL FLUSSO DI COSTO MINIMO CAPACITATO

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ex = b \\ 0 \le x \le U \end{cases} \qquad (11.1)$$

Scrivendo il vincolo $x \le U$, come $x + w = U$, $w \ge 0$ otteniamo la formulazione in forma duale standard

$$(11.2) \qquad \begin{cases} \min c^T x \\ Ex = b \\ x + w = U \\ x \ge 0,\ w \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \min c^T x \\ \begin{pmatrix} E & 0 \\ I_m & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ U \end{pmatrix} \\ x \ge 0,\ w \ge 0 \end{cases}$$

Sia $M = \begin{pmatrix} E & 0 \\ I_m & I_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times 2m}$

Vogliamo determinare una base associata a (11.2) ed una sottomatrice M_B di ordine $(n+m) \times (n+m-1)$ tale che $rk(M_B) = n+m-1$

A tale scopo consideriamo una tripartizione (T, L, U) dell'insieme A, in modo che T sia un albero di copertura di G.

Pertanto $x^T = (x_T^T, x_L^T, x_U^T)$ e sia (T', L', U') la analoga partizione della variabile w, ossia $w^T = (w_{T'}^T, w_{L'}^T, w_{U'}^T)$

<u>PROPOSIZIONE</u>: Sia $B = (T, U, T', L')$ ove $G(N, T)$ è un albero di copertura di G, allora la matrice M_B ha rango $rk(M_B) = n+m-1$