Introduzione alla ricerca operativa
Problemi e modelli

Giandomenico Mastroeni

TFA
Anno Accademico 2012-13

La metodologia della matematica applicata

- Problema reale
- Definizione del modello matematico
- Algoritmo risolutivo
- Analisi dei risultati

Il problema reale

Reperimento dei dati

Il problema reale, deve essere caratterizzato dalla possibilita' di reperire dati sufficientemente corretti ed esaustivi per la formulazione di un opportuno modello matematico.

Definizione degli obbiettivi

Ad esempio,la massimizzazione dei profitti in un problema di produzione

Definizione dei vincoli

La quantita' di risorse a disposizione

Modelli matematici

Modelli deterministici

I dati del problema sono valori certi

Modelli probabilistici

I dati sono caratterizzati da una distribuzione di probabilita'

Il modello matematico viene formulato a partire da un insieme di ipotesi sul problema reale che devono essere adeguatamente motivate. Tali ipotesi costituiscono i limiti del modello studiato e devono essere sempre tenute in considerazione, in particolar modo nell'analisi dei risultati ottenuti.

Modelli matematici

Problemi di ottimizzazione vincolata

Determinazione del massimo o del minimo di una funzione

$$\min(\max)\ f(x) \quad x \in R$$

Sistemi di equazioni lineari e non lineari

Modelli basati sui grafi

Strumenti matematici

- Calcolo differenziale
- Teoria dei grafi
- Algebra delle matrici

Algoritmo risolutivo

- Un algoritmo e' una sequenza di istruzioni univocamente determinate che portino in un tempo limitato ad una soluzione del problema o ad una sua opportuna approssimazione.
- Un algoritmo determina una particolare soluzione e non necessariamente tutto l'insieme delle possibili soluzioni.
- Gli algoritmi piu' comuni sono quelli iterativi mediante i quali viene generata una successione di punti convergente ad una soluzione ottimale del problema.

Analisi dei risultati

La ricaduta dei risultati ottenuti sulla formulazione del problema reale (feedback) e' di fondamentale importanza: riesaminando la formulazione del problema e confrontandola con il modello si possono evidenziare eventuali incongruenze o lacune sui dati utilizzati.
Un ulteriore esame della validita' del modello puo' essere effettuato variando i parametri di input e controllando se l'output e' compatibile con tali variazioni: tale esame e' particolarmente efficace quando vengano assegnati ai parametri valori prossimi agli estremi del loro intervallo di variazione.

Problemi di ottimizzazione

Nella sua forma piu' generale un problema di ottimizzazione scalare in $\mathbb{R}^n$ consiste nel determinare un punto $x \in R \subseteq X$ che renda minimo (o massimo) il valore di una funzione $f : X \to \mathbb{R}$, ove X e' un opportuno spazio. Tale problema viene indicato con la notazione

$$\min_{x \in R} \, (\max) \, f(x). \tag{1}$$

Dalla relazione

$$\max_{x \in R} \; f(x) = - \min_{x \in R} \, (-f(x)),$$

segue che il problema della ricerca del massimo di una funzione puo' essere ricondotto a quello della ricerca del minimo.

Osservazione

Se $R = X$, il problema (1) si dice non vincolato. Se X e' uno spazio topologico e R e' un insieme aperto, si conviene considerare il problema (1) non vincolato.

Definizione

(i) $\bar{x} \in R$ e' detto punto di minimo globale se

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in R.$$

(ii) $\bar{x} \in R$ e' detto punto di minimo locale se

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in R \cap V(\bar{x}),$$

ove $V(\bar{x})$ e' un intorno di $\bar{x}$.

Osservazione

Si noti che la definizione di punto di minimo locale richiede che sullo spazio X sia definita una topologia.

Problemi di programmazione matematica

Un problema di programmazione matematica e' un problema di ottimizzazione nel quale alcuni vincoli sono espressi mediante funzioni, ossia, l'insieme R e' definito nella forma

$$R := \{x \in X : g_i(x) \leq 0, \ i = 1, .., p, \ h_j(x) = 0, \ j = 1, .., m\},$$

ove $g : X \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $h : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Useremo la notazione:

$$g(x) := (g_1(x), .., g_p(x)), \quad h(x) := (h_1(x), .., h_m(x)).$$

Definizione

Si definisce problema di programmazione matematica, il problema:

$$\min_{x \in R} \ f(x) \tag{2}$$

ove $R := \{x \in X : g(x) \leq 0, \ h(x) = 0, \}$.

La funzione f viene anche detta funzione obbiettivo mentre g ed h sono dette funzioni vincolari.

A seconda delle proprieta' della funzione obbiettivo, delle funzioni vincolari e dell'insieme X, si distiguono varie classi di problemi di programmazione matematica.
Nel caso in cui le funzioni siano lineari ed $X = \mathbb{R}^n$, (2) e' detto problema di programmazione lineare le cui formulazioni standard sono della forma:

$$\begin{cases} \min \ \langle c, x \rangle \\ Ax = b, \quad (Ax \leq b) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ove $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Osservazione

Mediante opportune trasformazioni, e' possibile ricondursi ad una qualsiasi delle precedenti formulazioni.

Un problema di programmazione dei trasporti

Siano dati un insieme $A_1, A_2, .., A_m$ di origini nelle quali e' disponibile la quantita' $a_1, a_2, .., a_m$ di un materiale omogeneo che si desidera trasportare nelle destinazioni $B_1, B_2, .., B_n$ che hanno capacita' di ricezione di una quantita' pari a $b_1, b_2, .., b_n$, rispettivamente.

Problema

Detto c_{ij} il costo unitario di trasporto dall'origine A_i alla destinazione B_j, $i = 1, .., m$, $j = 1, .., n$, si intende formulare un problema di programmazione lineare per la minimizzazione del costo totale di trasporto del materiale disponibile nelle origini A_i alle destinazioni B_j.

Facciamo dapprima l'ulteriore ipotesi:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (A1)$$

(Vedremo in seguito che l'ipotesi (A1) non risultera' essere restrittiva). Dette x_{ij} le variabili che rappresentano la quantita' di materiale da trasportare dall'origine A_i alla destinazione B_j, $i = 1, .., m$, $j = 1, .., n$, il problema di programmazione dei trasporti puo' essere formulato nel modo seguente:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, .., m \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, .., n \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, .., m, \quad j = 1, .., n \end{cases} \qquad (3)$$

Nel caso in cui la (A1) non fosse verificata e valesse la relazione:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

e' possibile ricondursi alla precedente formulazione introducendo una origine fittizia A_{m+1} avente disponibilita' $a_{m+1} := \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, e definendo $c_{m+1,j} := 0, j = 1, .., n$.

In modo analogo, se valesse la relazione:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

e' possibile ricondursi alla precedente formulazione introducendo una destinazione fittizia B_{n+1} avente capacita' di ricezione pari a $b_{n+1} := \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, e definendo $c_{i,n+1} := 0, i = 1, .., m$.

Alternativamente, se valesse la relazione:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

volendo garantire che tutto il materiale presente nelle origini venga trasferito nelle destinazioni (senza che queste vengano saturate), il problema di programmazione dei trasporti puo' essere formulato nel modo seguente:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, .., m \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j, \quad j = 1, .., n \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, .., m, \quad j = 1, .., n \end{cases} \tag{4}$$

Analogamente, se valesse la relazione:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

volendo garantire che il materiale presente nelle origini venga trasferito nelle destinazioni in modo che queste vengano saturate, il problema di programmazione dei trasporti puo' essere formulato nel modo seguente:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, .., m \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, .., n \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, .., m, \quad j = 1, .., n \end{cases} \tag{5}$$

Il problema della dieta

Si consideri un insieme $C_1, C_2, .., C_n$ di n cibi nei quali sono presenti m sostanze nutritive $S_1, S_2, .., S_m$, dei quali sono noti i seguenti dati:

- il costo c_j del cibo C_j, $j = 1, .., n$;
- la quantita' a_{ij} di sostanza S_i presente in un'unita' di cibo C_j, $i = 1, .., m$, $j = 1, .., n$.
- b_i la quantita' minima di sostanza S_i richiesta dalla dieta, $i = 1, .., m$.
- Si vuole formulare un problema di programmazione lineare per determinare una dieta di minimo costo che soddisfi l'apporto nutritivo richiesto.

Dette x_j, $j = 1, .., n$ le variabili che rappresentano la quantita' di cibo C_j presente nella dieta, il problema puo' essere formulato nel modo seguente:

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad s.t. \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \;\; i = 1, .., m \quad x_j \geq 0, \;\; j = 1, .., n$$

Un problema di produzione

Si vogliono fabbricare n prodotti $P_1, P_2, .., P_n$, avendo a disposizione m materie prime $M_1, M_2, .., M_m$, dei quali sono noti i seguenti dati:

- il profitto unitario c_j relativo alla vendita' del prodotto P_j, $j = 1, .., n$;
- la quantita' a_{ij} di materia prima M_i necessaria per fabbricare un'unita' di prodotto P_j, $i = 1, .., m$, $j = 1, .., n$.
- la quantita' b_i di materia prima M_i di cui si dispone, $i = 1, .., m$.

Problema

Si vuole formulare un problema di programmazione lineare per determinare un piano di produzione che massimizzi il profitto ottenuto.

Dette x_j, $j = 1, .., n$ le variabili che rappresentano la quantita' di prodotto P_j che conviene fabbricare, si ha la seguente:

Formulazione

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, .., m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, .., n \end{cases} \tag{6}$$

Definendo

$$c := (c_1, .., c_n), \quad x := (x_1, .., x_n)^T, \quad A := [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}, \quad b := (b_1, .., b_m)^T,$$

il problema viene formulato nella forma compatta:

$$\begin{cases} \max \langle c, x \rangle \\ Ax \leq b, \\ x \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{7}$$

Reti sociali

- Una rete sociale identifica la presenza di una relazione tra diverse entita' sociali, dette attori;
- Gli attori non sono necessariamente singole persone ma possono essere gruppi di persone, enti, citta', nazioni, etc.
- Le relazioni possono essere di tipo emozionale, formale, biologico (amicizia, autorita', discendenza) oppure possono esprimere connessioni fisiche (una strada, un ponte) o trasferimenti di risorse.

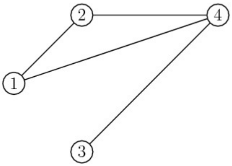
Rappresentazione dei dati di una rete sociale

- Mediante un grafo
- Sociometrica
- Algebrica

Esempio

Sia $N = \{1, 2, 3, 4\}$ l'insieme di 4 bambini di cui si considera la relazione di amicizia.

Rappresentazione grafica



Rappresentazione sociometrica

$$X := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rappresentazione algebrica

$x_{ij} = 1$ identifica la presenza di una relazione tra il bambino i e il bambino j.

$$x_{12} = 1, x_{14} = 1, x_{24} = 1, x_{34} = 1$$