Esame di Ricerca Operativa del 16/01/17

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -6\ x_1 + 5\ x_2 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq -8 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq -6 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -x_1 - x_2 \leq 8 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{1, 6}	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1 iterazione	{3,4}					
2 iterazione						

Esercizio 3. Un'unita' sanitaria locale (ASL) intende istituire un servizio di assistenza giornaliera che coinvolge n cittadini ed m operatori sanitari $m \geq n$. L'azienda ASL deve tenere conto dei seguenti dati e dei seguenti vincoli sull'erogazione del servizio.

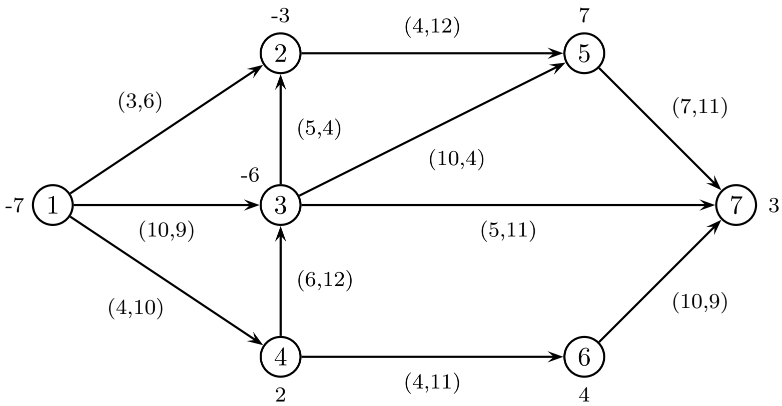
- A ciascun cittadino deve essere assegnato esattamente un operatore;
- $t_j (\leq 8)$ e' il tempo (in ore) di servizio giornaliero richiesto dal cittadino j, $j = 1,..,n$;
- δ_{ij} e' il costo della prestazione giornaliera dell'operatore i per l'assistenza del cittadino j, $i = 1,..,m$, $j = 1,..,n$;
- Ciascun operatore non puo' assistere piu' di 2 cittadini al giorno e non puo' lavorare piu' di 8 ore al giorno.

Si formuli un problema di PLI per determinare quali operatori assumere giornalmente in modo da minimizzare il costo complessivo del servizio.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacit).

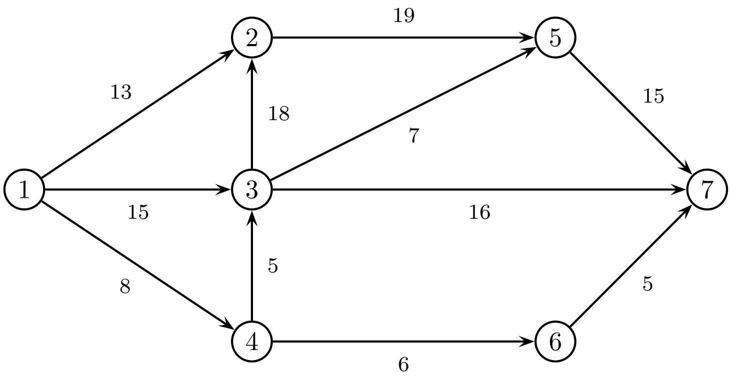


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)	(3,7)	$x =$		
(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (5,7) (6,7)	(3,7)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

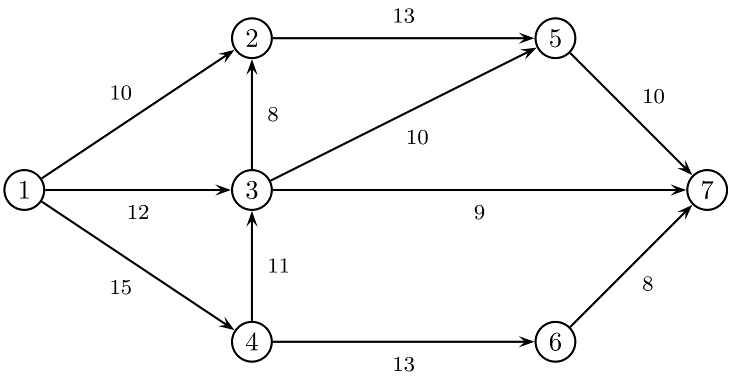
	1 iterazione	2 iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7)	
Archi di U	(3,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacit minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 6\ x_1 + 6\ x_2 \\ 19\ x_1 + 16\ x_2 \geq 52 \\ 18\ x_1 + 19\ x_2 \geq 55 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $\qquad$ $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ $\qquad$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 citt, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

citt	**2**	**3**	**4**	**5**
1	10	21	62	43
2		95	54	57
3			11	9
4				13

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: $\qquad$ $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo pi vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: $\qquad$ $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{23}, x_{35}, x_{34}.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -6\ x_1 + 5\ x_2 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq -8 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq -6 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -x_1 - x_2 \leq 8 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (2,\ -4)$	SI	NO
$\{1,\ 6\}$	$y = \left(\frac{11}{3},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -\frac{4}{3},\ 0\right)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1 iterazione	$\{3,\ 4\}$	$(4,\ -8)$	$(0,\ 0,\ -1,\ -5,\ 0,\ 0,\ 0)$	3	$8,\ \frac{4}{3},\ 1,\ 2$	6
2 iterazione	$\{4,\ 6\}$	$(3,\ -9)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ -\frac{11}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$	4	$\frac{14}{3},\ 18,\ 2$	5

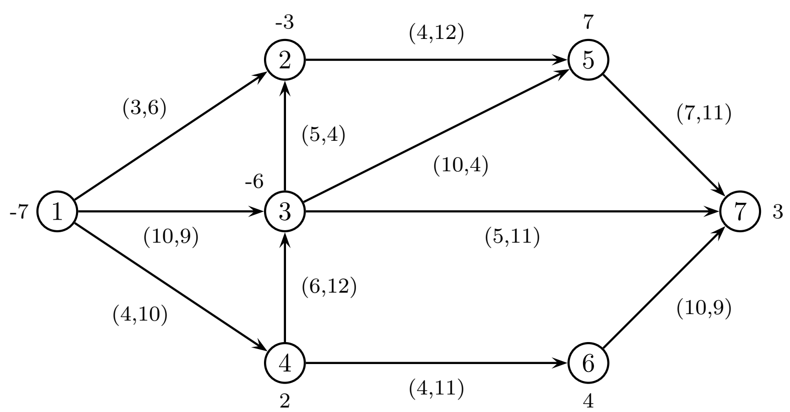
Esercizio 3. a) Variabili decisionali:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'operatore i viene assegnato al cittadino j} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Modello:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}x_{ij} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad j = 1,..,n \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_j x_{ij} \leq 8 \quad i = 1,..,m \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 2 \quad i = 1,..,m \\ x_{ij} \in \{0,1\}\ i = 1,..m, \quad j = 1,..,n \end{cases}$$

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacit).

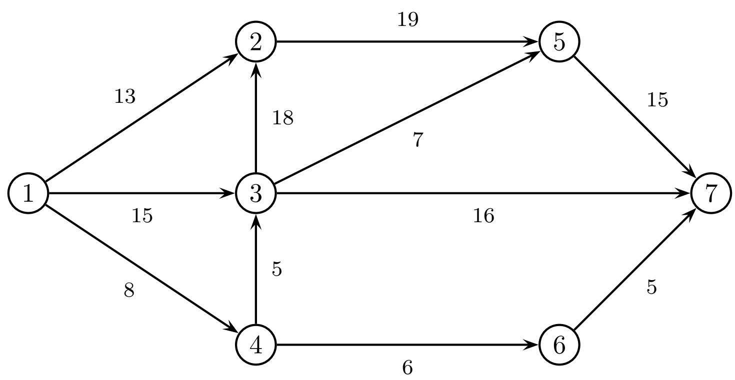


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)	(3,7)	$x = (0,\ 0,\ 7,\ 3,\ 0,\ 0,\ 11,\ 5,\ 0,\ -4,\ -4)$	NO	SI
(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (5,7) (6,7)	(3,7)	$\pi = (0,\ 3,\ 10,\ 4,\ 20,\ 17,\ 27)$	NO	SI

Esercizio 6. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 5.

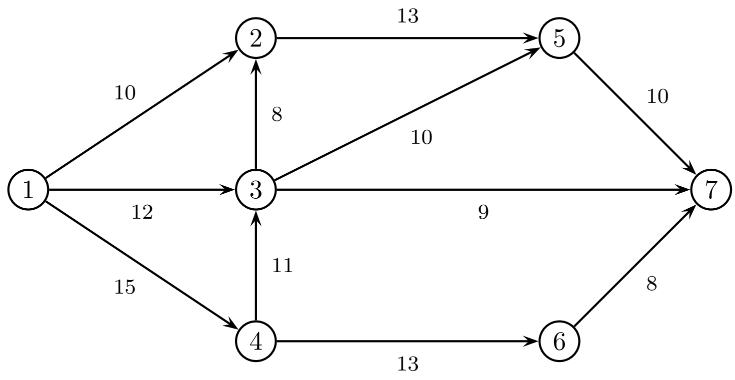
	1 iterazione	2 iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7)	(1,2) (1,3) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6)
Archi di U	(3,5)	(3,5)
x	(0, 0, 7, 3, 0, 4, 2, 0, 5, 0, 1)	(0, 1, 6, 3, 0, 4, 3, 0, 4, 0, 0)
π	(0, 3, 13, 4, 7, 8, 18)	(0, 3, 10, 4, 7, 8, 15)
Arco entrante	(1,3)	(3,5)
ϑ^+, ϑ^-	9 , 1	6 , 1
Arco uscente	(6,7)	(1,3)

Esercizio 7. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1 π	iter 1 p	iter 2 π	iter 2 p	iter 3 π	iter 3 p	iter 4 π	iter 4 p	iter 5 π	iter 5 p	iter 6 π	iter 6 p	iter 7 π	iter 7 p
nodo visitato	1		4		2		3		6		7		5	
nodo 2	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1
nodo 3	15	1	13	4	13	4	13	4	13	4	13	4	13	4
nodo 4	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	32	2	20	3	20	3	20	3	20	3
nodo 6	$+\infty$	-1	14	4	14	4	14	4	14	4	14	4	14	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	29	3	19	6	19	6	19	6
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		3, 5, 6		5, 6, 7		5, 7		5		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	9	(0, 9, 0, 0, 0, 0, 9, 0, 0, 0, 0)	9
1 - 2 - 5 - 7	10	(10, 9, 0, 10, 0, 0, 9, 0, 0, 10, 0)	19
1 - 4 - 6 - 7	8	(10, 9, 8, 10, 0, 0, 9, 0, 8, 10, 8)	27

Taglio di capacit minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $N_t = \{7\}$

Esercizio 8. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 6\ x_1 + 6\ x_2 \\ 19\ x_1 + 16\ x_2 \geq 52 \\ 18\ x_1 + 19\ x_2 \geq 55 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{108}{73}, \frac{109}{73}\right)$ $v_I(P) = 18$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (2, 2)$ $v_S(P) = 24$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $18\, x_1 + 16\, x_2 \geq 51$
$r = 2$ $x_1 + x_2 \geq 3$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 citt, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

citt	**2**	**3**	**4**	**5**
1	10	21	62	43
2		95	54	57
3			11	9
4				13

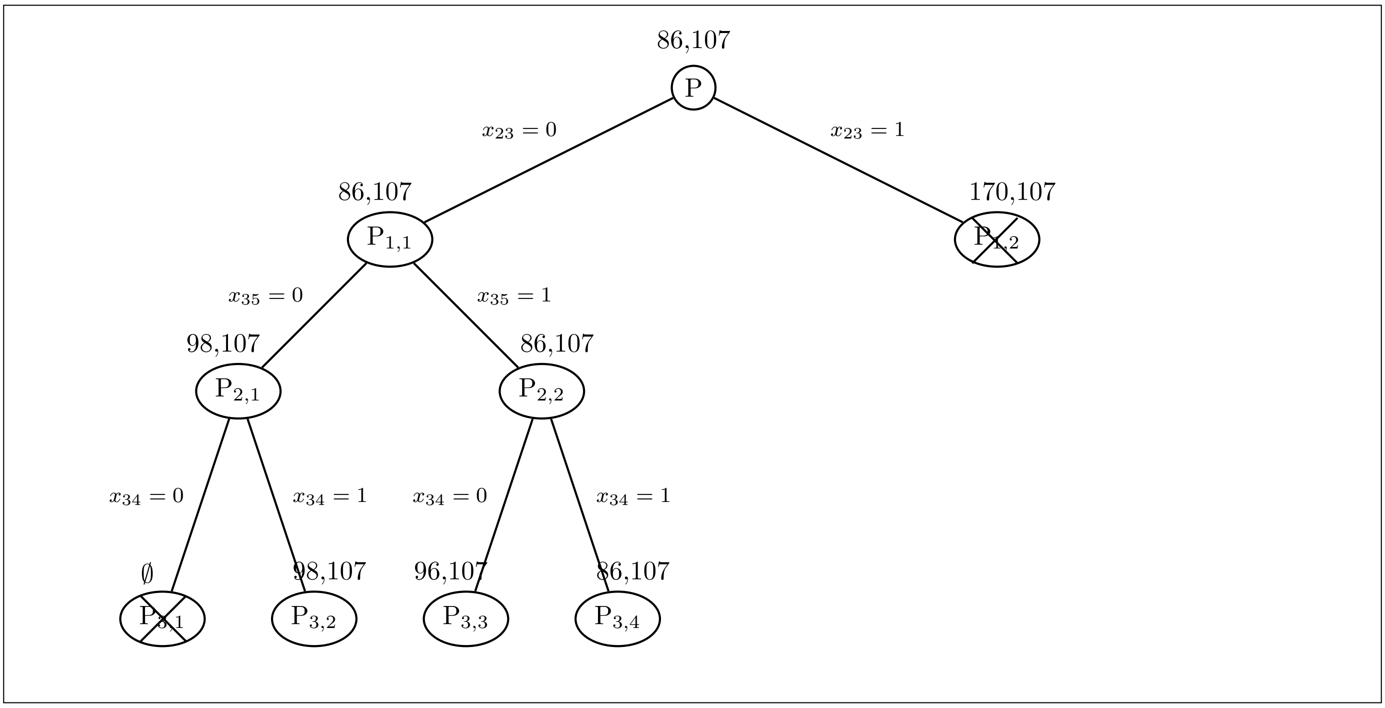
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: (1 , 2) (1 , 5) (3 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $v_I(P) = 86$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo pi vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: $3 - 5 - 4 - 2 - 1$ $v_S(P) = 107$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{23}, x_{35}, x_{34}.


86,107
P
x23 = 0
x23 = 1
86,107
P1,1
170,107
P1,2
x35 = 0
x35 = 1
98,107
P2,1
86,107
P2,2
x34 = 0
x34 = 1
x34 = 0
x34 = 1
∅
P3,1
98,107
P3,2
96,107
P3,3
86,107
P3,4