Esame di Ricerca Operativa del 16/01/17

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 2\ x_1 + 9\ x_2 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq -8 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq -6 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 3\ x_2 \leq -14 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{1, 6}	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1 iterazione	{5,6}					
2 iterazione						

Esercizio 3. Un'unita' sanitaria locale (ASL) intende istituire un servizio di assistenza giornaliera che coinvolge n cittadini ed m operatori sanitari $m \geq n$. L'azienda ASL deve tenere conto dei seguenti dati e dei seguenti vincoli sull'erogazione del servizio.

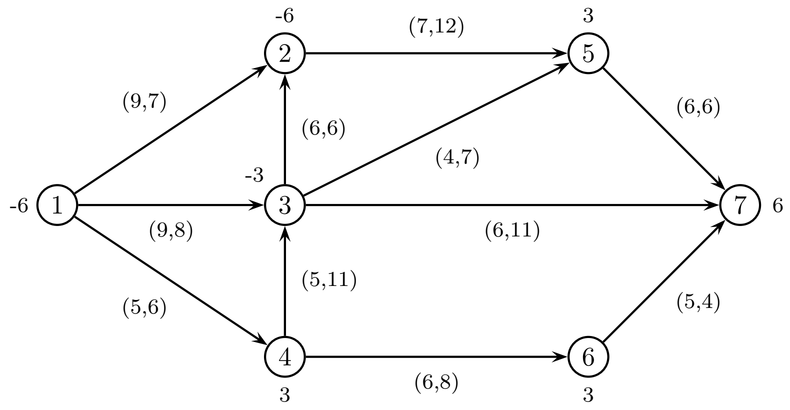
- A ciascun cittadino deve essere assegnato esattamente un operatore;
- $t_j (\leq 8)$ e' il tempo (in ore) di servizio giornaliero richiesto dal cittadino j, $j = 1, .., n$;
- γ_{ij} e' il costo della prestazione giornaliera dell'operatore i per l'assistenza del cittadino j, $i = 1, .., m$, $j = 1, .., n$;
- Ciascun operatore non puo' assistere piu' di 3 cittadini al giorno e non puo' lavorare piu' di 8 ore al giorno.

Si formuli un problema di PLI per determinare quali operatori assumere giornalmente in modo da minimizzare il costo complessivo del servizio.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacit).

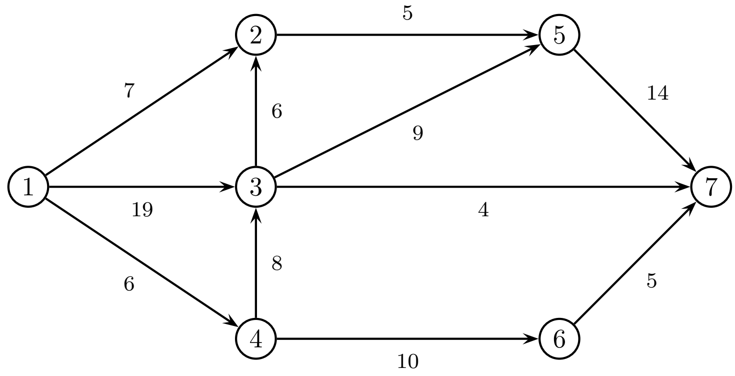


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (1,4) (2,5) (3,2) (4,6) (6,7)	(1,2)	$x =$		
(1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (5,7) (6,7)	(1,3)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

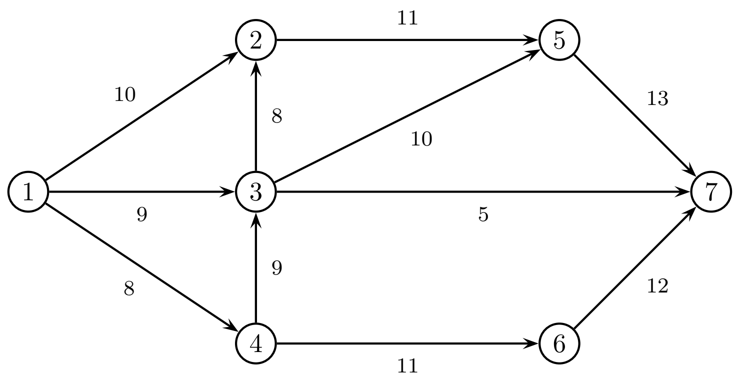
	1 iterazione	2 iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)	
Archi di U	(5,7)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacit minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 10\ x_1 + 14\ x_2 \\ 16\ x_1 + 6\ x_2 \geq 65 \\ 11\ x_1 + 15\ x_2 \geq 52 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $\qquad$ $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ $\qquad$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 citt, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

citt	**2**	**3**	**4**	**5**
1	14	24	63	45
2		96	57	58
3			11	9
4				14

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: $\qquad$ $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo pi vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: $\qquad$ $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{34}, x_{35}, x_{23}.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 2\ x_1 + 9\ x_2 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq -8 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq -6 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 3\ x_2 \leq -14 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (2,\ -4)$	SI	SI
$\{1,\ 6\}$	$y = \left(\frac{7}{3},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -\frac{20}{3},\ 0\right)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1 iterazione	$\{5,\ 6\}$	$(2,\ -8)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 7,\ -16,\ 0)$	6	$1,\ \frac{8}{3},\ \frac{12}{7}$	1
2 iterazione	$\{1,\ 5\}$	$(1,\ -6)$	$(4,\ 0,\ 0,\ 0,\ -5,\ 0,\ 0)$	5	$4,\ 12,\ 4$	2

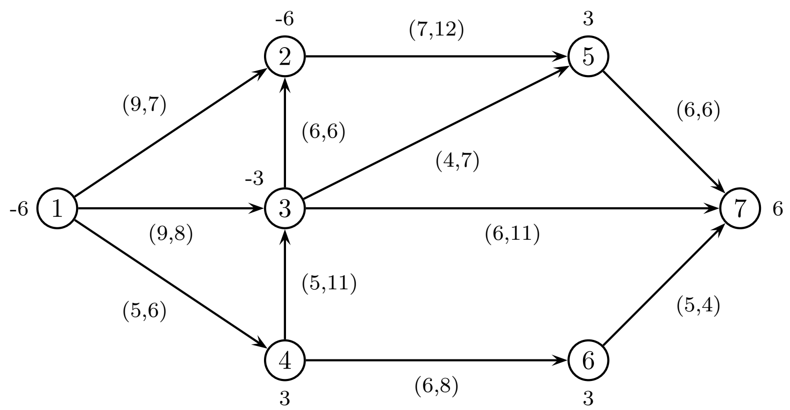
Esercizio 3. a) Variabili decisionali:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'operatore i viene assegnato al cittadino j} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Modello:

$$\begin{cases} \min\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} x_{ij} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad j = 1, .., n \\ \sum_{j=1}^{n} t_j x_{ij} \leq 8 \quad i = 1, .., m \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 3 \quad i = 1, .., m \\ x_{ij} \in \{0, 1\}\ i = 1, ..m, \quad j = 1, .., n \end{cases}$$

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacit).

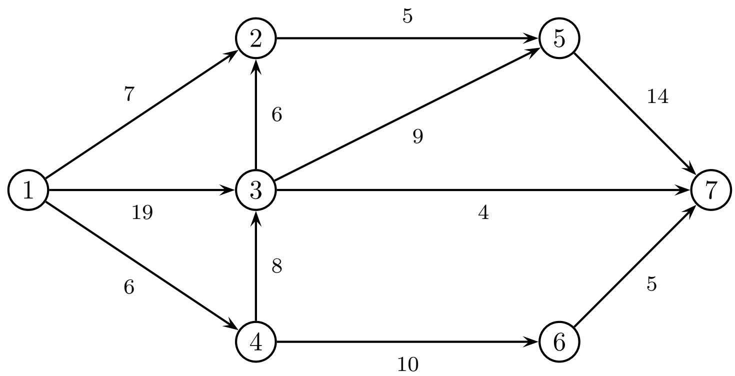


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (1,4) (2,5) (3,2) (4,6) (6,7)	(1,2)	$x = (7,\ -13,\ 12,\ 3,\ -10,\ 0,\ 0,\ 0,\ 9,\ 0,\ 6)$	NO	NO
(1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (5,7) (6,7)	(1,3)	$\pi = (0,\ 3,\ 6,\ 5,\ 10,\ 11,\ 16)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

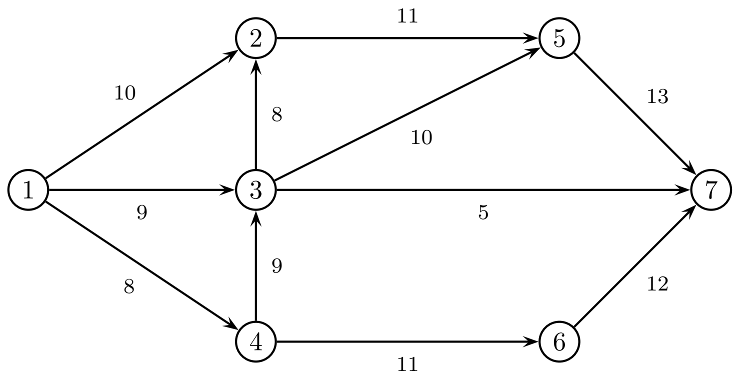
	1 iterazione	2 iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)	(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)
Archi di U	(5,7)	(5,7)
x	(0, 0, 6, 6, 0, 3, 0, 0, 3, 6, 0)	(0, 0, 6, 6, 0, 3, 0, 0, 3, 6, 0)
π	(0, 9, 12, 5, 16, 11, 18)	(0, 6, 9, 5, 13, 11, 15)
Arco entrante	(1,3)	(5,7)
ϑ^+, ϑ^-	4 , 0	11 , 3
Arco uscente	(1,2)	(3,5)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		2		5		3		6		7	
nodo 2	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1
nodo 3	19	1	14	4	14	4	14	4	14	4	14	4	14	4
nodo 4	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	12	2	12	2	12	2	12	2	12	2
nodo 6	$+\infty$	-1	16	4	16	4	16	4	16	4	16	4	16	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	26	5	18	3	18	3	18	3
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		3, 5, 6		3, 6, 7		6, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	5	(0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0)	5
1 - 2 - 5 - 7	10	(10, 5, 0, 10, 0, 0, 5, 0, 0, 10, 0)	15
1 - 3 - 5 - 7	3	(10, 8, 0, 10, 0, 3, 5, 0, 0, 13, 0)	18
1 - 4 - 6 - 7	8	(10, 8, 8, 10, 0, 3, 5, 0, 8, 13, 8)	26

Taglio di capacit minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $N_t = \{4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 10\ x_1 + 14\ x_2 \\ 16\ x_1 + 6\ x_2 \geq 65 \\ 11\ x_1 + 15\ x_2 \geq 52 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{52}{11}, 0\right)$ $v_I(P) = 48$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (5, 0)$ $v_S(P) = 50$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $5\,x_1 + 7\,x_2 \geq 24$

$r = 3$ $6\,x_1 + 9\,x_2 \geq 29$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 citt, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

citt	**2**	**3**	**4**	**5**
1	14	24	63	45
2		96	57	58
3			11	9
4				14

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: (1 , 2) (1 , 5) (3 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $v_I(P) = 93$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo pi vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: 3 – 5 – 4 – 2 – 1 $v_S(P) = 118$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{34}, x_{35}, x_{23}.