PRINCIPIO di INDUZIONE BEN FONDATA

Titolo nota 22/10/2015

Sia $(A, \sqsubset)$ ben fondato

$$\underbrace{\left(\forall x \in A.\ \underbrace{\left(\forall y \in A\ y \sqsubset x \Rightarrow P(y)\right)}\Rightarrow P(x)\right)} \Rightarrow \underbrace{\forall n \in A.\ P(n)}$$

- Gli elementi $m \in A$ tali che non esiste $m' \in A$ con $m' \sqsubset m$ si dicono MINIMALI

Se x è minimale, la formula

$$\left(\forall y \in A.\ y \sqsubset x \Rightarrow P(y)\right) \Rightarrow P(x)$$

si riduce a $\quad P(x)$

true, è una quantificazione $\forall$ sull'insieme vuoto

In pratica, per dimostrare $\forall x \in A.\ P(x)$ con $(A, \sqsubset)$ ben fondato dobbiamo:

→ ① dimostrare $P(m)$, per ogni $m \in A$ minimale CASO BASE

→ ② dimostrare $\left(\forall y \in A.\ y \sqsubset x \Rightarrow P(y)\right) \Rightarrow P(x)$ per un generico x non minimale. CASO INDUTTIVO

Perché vale questo principio?? Supponiamo ① e ② ma che non valga $\forall x.\ P(x)$.
Allora $\exists\, x_0 \in A.\ \neg P(x_0)$

- x_0 non può essere minimale perché stiamo supponendo ①
- ma deve esistere $x_1 \in A$, $x_1 \sqsubset x_0$ per cui $\neg P(x_1)$ perché stiamo supponendo ②
- x_1 non può essere minimale, e deve esistere $x_2 \sqsubset x_1$ tale che $x_2 \sqsubset x_1$

Stiamo costruendo una sequenza decrescente all'infinito

$$\cdots\cdots \sqsubset x_2 \sqsubset x_1 \sqsubset x_0$$

Assurdo perché $(A, \sqsubset)$ è ben fondato.

$$f(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n = 0 \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ f(n-2) & \text{se } n \neq \emptyset \wedge n \neq 1 \end{cases} \qquad f : \mathbb{N} \longrightarrow \{\emptyset, 1\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ f(n) = n \bmod 2$$

Definiamo la seguente relazione di precedenza su $\mathbb{N}$

$$x \prec y \equiv x = y - 2$$

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ 8 & & 9 \\ | & & | \\ 6 & & 7 \\ | & & | \\ 4 & & 5 \\ | & & | \\ 2 & & 3 \\ | & & | \\ 0 & & 1 \end{array}$$

<u>è ben fondata!</u>

$\emptyset$, 1 sono minimali

$\forall n \in \mathbb{N}.\ \underline{f(n) = n \bmod 2}$ per induzione ben fondata rispetto a $(\mathbb{N}, \prec)$

CASO BASE

$f(0)$
$= \{1° \text{ caso def. } f\}$
0
$= \{\text{calcolo}\}$
$0 \bmod 2$

$f(1)$
$= \{2° \text{ caso def. di } f\}$
1
$= \{\text{calcolo}\}$
$1 \bmod 2$

CASO INDUTTIVO

Dato $n \in \mathbb{N}$ non minimale $(n \neq 0,\ n \neq 1)$, dobbiamo dimostrare

$(\forall m \in \mathbb{N}.\ m \prec n.\ \underline{f(m) = m \bmod 2})$ IPOTESI INDUTTIVA

$\Rightarrow$

$\underline{f(n) = n \bmod 2}$

$f(n)$
$= \{n \text{ non minimale, } 3° \text{ caso def. di } f\}$
$f(n-2)$
$= \{n-2 \prec n : \text{Ip. induttiva} : f(n-2) = (n-2) \bmod 2\}$
$(n-2) \bmod 2$
$= \{\text{proprietà} : (n-2) \bmod 2 = n \bmod 2\}$
$n \bmod 2$

Titolo nota 08/10/2015

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$f(n,m) = \begin{cases} m & \text{se } n = \emptyset \wedge (m = 0 \vee m = 1) \\ f(n, m-2) + 2 & \text{se } n = \emptyset \wedge m \neq 0 \wedge m \neq 1 \\ f(n-1, m) + 1 & \text{se } n \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\boxed{\forall n, m \in \mathbb{N}.\ f(n,m) = n + m}$$

Dobbiamo scegliere una relazione di precedenza su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ben fondata.

$$\langle n, m \rangle \sqsubset \langle n', m' \rangle$$

$\forall n, m, n', m' \in \mathbb{N}$.

$$\langle n, m \rangle \sqsubset \langle n', m' \rangle \equiv (n' = \emptyset \wedge m' \geq 2 \wedge n = \emptyset \wedge m = m' - 2) \vee$$
$$(n' \neq \emptyset \wedge n = n' - 1 \wedge m' = m)$$

Questa relazione di precedenza è tale che:

se $\langle x, y \rangle \sqsubset \langle z, w \rangle$ allora il calcolo di $f(z,w)$ utilizza $f(x,y)$ ricorsivamente

RELAZIONE di PRECEDENZA INDOTTA dalla DEFINIZIONE

Disegno la relazione di precedenza indotta

- $\langle x, y \rangle$ $\qquad x \neq \emptyset \wedge y \geq 2$
- $\langle x-1, y \rangle$

$\langle x-2, y \rangle$

$\vdots$

$\langle \emptyset, y \rangle$

$\langle \emptyset, y-2 \rangle$

$\langle \emptyset, y-4 \rangle$

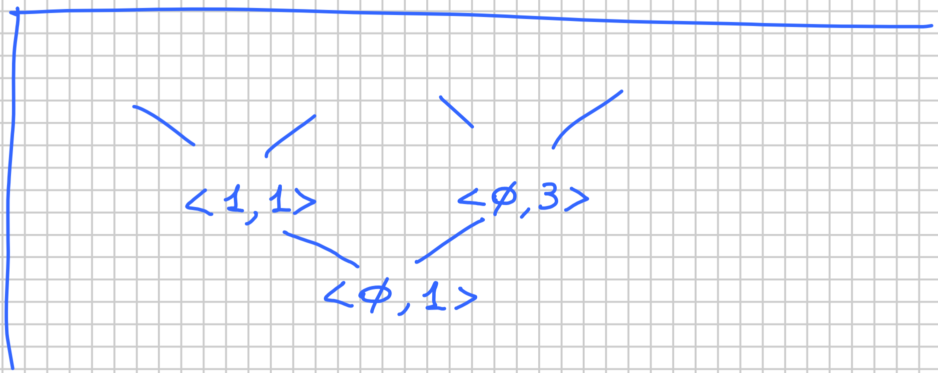
$\vdots$

$\langle \emptyset, b \rangle$

con $b = \emptyset \vee b = 1$

è una generica sequenza decrescente rispetto a $\sqsubset$ e mostra che $\sqsubset$ è ben fondata.

Dimostriamo $\forall n, m.\ f(n,m) = n+m$ per induzione b.f. rispetto a $\sqsubset$.



CASO BASE: I minimali di $\sqsubset$ sono $\langle 0,0\rangle$ e $\langle 0,1\rangle$, cioè $\langle 0,m\rangle$ con $m \leq 1$

$f(0,m)$

$= \{ 1° \text{ caso def. di } f \}$

m

$= \{ \text{calcolo} \}$

$0 + m$

CASO INDUTTIVO 1°: $\langle n,m\rangle$ con $n=0 \wedge m \geq 2$

$f(n,m)$

$= \{ 2° \text{ caso def. di } f \}$

$f(n, m-2) + 2$

$= \{ \langle n,m-2\rangle \sqsubset \langle n,m\rangle : \text{Ip. induttiva } f(n,m-2) = n+m-2 \}$

$n+m-2+2$

$= \{ \text{calcolo} \}$

$n+m$

CASO INDUTTIVO: 2°: $n \neq 0$

$f(n,m)$

$= \{ 3° \text{ caso def. di } f \}$

$f(n-1,m) + 1$

$= \{ \langle n-1,m\rangle \sqsubset \langle n,m\rangle : \text{Ip. induttiva } f(n-1,m) = n-1+m \}$

$n-1+m+1$

$= \{ \text{calcolo} \}$

$n+m$

RELAZIONE di PRECEDENZA INDOTTA

Data una definizione ricorsiva di funzione $f : A \to B$
la relazione di precedenza indotta dalla definizione di f $\prec_f$

$\forall x, y \in A . \quad x \prec_f y$ se il calcolo di $f(y)$ utilizza ricorsivamente $f(x)$

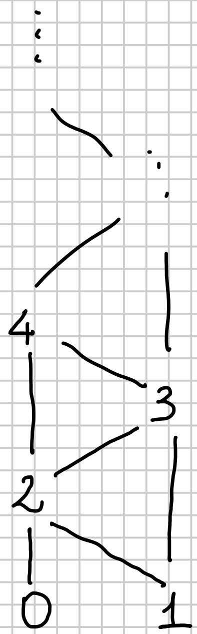
$$\underline{fib(n)} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n = \emptyset \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ \underline{fib(n-1)} + \underline{fib(n-2)} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

$$fib : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$x \prec_{fib} y \equiv x = y-1 \lor x = y-2$$

questa definizione implica che $\emptyset$ e 1 sono MINIMALI

Disegno $\prec_{fb}$



è ben fondato!!

$$f(n,m) = \begin{cases} 3 + f(n, \underline{m-1}) & \text{se } n=0 \wedge m>0 \\ \underline{f(n-1, m+1)} - 1 & \text{se } n>0 \\ 0 & \text{se } n=0 \wedge m=0 \end{cases}$$

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$\boxed{\forall n, m \in \mathbb{N}.\ f(n,m) = 2 \cdot n + 3m}$$

$$\langle n, m \rangle \sqsubset_f \langle n', m' \rangle \equiv (n'=0 \wedge m'>0 \wedge n=n' \wedge m=m'-1) \vee$$
$$(n'>0 \wedge n=n'-1 \wedge m=m'+1)$$

Diagramma

$$\begin{array}{c} \langle x, y \rangle \quad x>0 \\ | \\ \langle x-1, y+1 \rangle \\ | \\ \langle x-2, y+2 \rangle \\ \vdots \\ \langle 0, y+x \rangle \\ | \\ \langle 0, y+x-1 \rangle \\ \vdots \\ \langle 0, 0 \rangle \end{array}$$

Titolo nota 08/10/2015

$$\forall n,m.\ f(n,m) = 2n + 3m$$

Caso base : $\langle \emptyset, \emptyset \rangle$ minimale

$f(\emptyset,\emptyset)$

$= \{3^\circ \text{ caso def. } f\}$

$\emptyset$

$=$

$2\cdot\emptyset + 3\cdot\emptyset$

Caso induttivo 1: $\langle n,m \rangle$ con $n > \emptyset$

$f(n,m)$

$= \{2^\circ \text{ caso def. } f\}$

$\underline{f(n-1, m+1)} - 1$

$= \{ \langle n-1, m+1 \rangle \sqsubset_f \langle n,m \rangle$

Ip. induttiva

$f(n-1, m+1) = 2\cdot(n-1) + 3(m+1) \}$

$\underline{2(n-1) + 3(m+1)} - 1$

$= \{\text{calcolo}\}$

$2n - \cancel{2} + 3m \cancel{+3} \cancel{-1}$

$=$

$2n + 3m$

Caso induttivo 2: $\langle n,m \rangle$ con $n=0 \wedge m > \emptyset$

$f(n,m)$

$= \{1^\circ \text{ caso def. } f\}$

$\underline{f(n, m-1)} + 3$

$= \{ \langle n, m-1 \rangle \sqsubset_f \langle n,m \rangle$

Ip. indutt. : $f(n,m-1) = 2\cdot n + 3(m-1) \}$

$\underline{2\cdot n + 3(m-1)} + 3$

$= \{\text{calcolo}\}$

$2\cdot n + 3m \cancel{-3} \cancel{+3}$

Definire una funzione ricorsiva $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ in modo che

$$\forall n, m \in \mathbb{N}. \quad f(n,m) = n + 2 \cdot m + 1$$

e che la relazione di precedenza $\prec_f$ indotta sia la seguente

$$\begin{array}{c}
\langle n, m \rangle \qquad m > 0 \\
| \\
\langle n+1, m-1 \rangle \\
| \\
\vdots \\
\langle n+m, 0 \rangle \\
| \\
\langle n+m-2, 0 \rangle \\
| \\
\vdots \\
\langle b, 0 \rangle
\end{array}$$

$b = 0 \vee b = 1$

La relazione di precedenza ci dice che:

1. $\langle 0, 0 \rangle$ e $\langle 1, 0 \rangle$ sono tutte e sole le coppie minimali
2. la funzione deve calcolare $f(n, 0)$ usando $f(n-2, 0)$
3. la funzione deve calcolare $f(n,m)$ con $m > 0$ usando $f(n+1, m-1)$

Titolo nota 08/10/2015

$$f(n,m) = \begin{cases} 1 & n=\emptyset \wedge m=\emptyset \\ 2 & n=1 \wedge m=0 \\ \underbrace{f(n-2,\emptyset) \pm ?} & m=\emptyset \wedge n\geq 2 \\ f(n+1,m-1) \pm ? \quad +1 & m>0 \end{cases}$$

$f(n,m) = \underline{n+2\cdot m+1}$

CASO INDUTTIVO 2: $\langle n,m\rangle$ con $m>0$

$f(n,m)$

$= \{$ 3° caso def. di f $\}$

$f(n+1, m-1)$?? $+1$

$= \{\langle n+1, m-1\rangle \sqsubset_f \langle n,m\rangle$.

Ip. ind. $f(n+1,m-1) = (n+1)+2(m-1)+1\}$

$(n+1)+2(m-1)+1$?? $+1$

$= n+\cancel{1}+2m\cancel{-2}\cancel{+1}$?? $+1$

$= n+2m$?? $+1$