TEOREMA di RICORSIONE

Sia $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$. Se T è CONTINUA:

1) $I = \bigcup_{i \geq \emptyset} T^i(\{\})$ è un punto fisso di T

2) Preso $J \in \mathbb{P}_A$ tale che $J = T(J)$ (punto fisso di T) allora $I \subseteq J$

$T^i(\{\})$?

$$T^\emptyset(\{\}) = \{\}$$

$$T^{i+1}(\{\}) = T(T^i(\{\}))$$

$$T^i(\{\}) = \underbrace{T(T(\dots T(\{\})\dots))}_{i \text{ volte}}$$

Il minimo punto fisso $\bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})$ è per noi la soluzione CANONICA dell'equazione

$$X = T(X)$$

LEMMA Sia $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ continua.
Allora, per ogni $i \geq 0$ vale

$$T^i(\{\}) \subseteq T^{i+1}(\{\})$$

Dimostrazione per induzione

Caso base $T^0(\{\}) \subseteq T^1(\{\}) = T(T(\{\}))$

$$\begin{aligned} & T^0(\{\}) \\ = \quad & \{\text{per definizione di } T^k\} \\ & \{\} \\ \subseteq \quad & \{\ \{\} \subseteq A,\ A \text{ qualunque}\} \\ & T^1(\{\}) \end{aligned}$$

Sia $P(x)$ asserto sui numeri naturali.

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Se

caso base 1) $P(\emptyset)$ è vero

caso induttivo 2) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ è vera

allora possiamo concludere

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ P(n)$$

Caso induttivo

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

IPOTESI INDUTTIVA

$$\underbrace{T^n(\{\}) \subseteq T^{n+1}(\{\})}_{P(n)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{T^{n+1}(\{\}) \subseteq T^{n+2}(\{\})}_{P(n+1)}$$

$T^{n+1}(\{\})$

$=$ { def. T^k }

$T(T^n(\{\}))$

$\subseteq$ { Ip. induttiva $T^n(\{\}) \subseteq T^{n+1}(\{\})$
T è continua, quindi anche monotona
$X \subseteq Y \Rightarrow T(X) \subseteq T(Y)$ }

$T(T^{n+1}(\{\}))$

$=$

$T^{n+2}(\{\})$

Dimostriamo la prima parte del th. di ricorsione

$I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})$ è un punto fisso di T. Dobbiamo mostrare $I = T(I)$

$$T(I)$$

$= \{ \text{def. } I \}$

$$T\left(\bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})\right)$$

$= \{$ Lemma ci dice $T^0(\{\}) \subseteq T^1(\{\}) \subseteq \cdots \subseteq T^i(\{\}) \subseteq \cdots$, T è continua $\}$

$$\bigcup_{i \geq 0} T(T^i(\{\}))$$

$= \{ \text{def. di } T^k \}$

$$\bigcup_{i \geq 0} T^{i+1}(\{\})$$

$$= \bigcup_{i \geq 1} T^i(\{\})$$

$= \{ \{\} \cup A = A \}$

$$\{\} \cup \bigcup_{i \geq 1} T^i(\{\})$$

$= \{ T^0(\{\}) = \{\} \}$

$$T^0(\{\}) \cup \bigcup_{i \geq 1} T^i(\{\})$$

$$= \bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\}) = I$$

Seconda parte del th. di ricorsione

Se $J = T(J)$ allora $I \subseteq J$, I è il MINIMO PUNTO FISSO

Dimostrazione

$$I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})$$

Se dimostriamo che, $\boxed{\text{per ogni } i \geq \emptyset \ T^i(\{\}) \subseteq J}$ possiamo concludere

$$\bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\}) \subseteq J$$

$$T^i(\{\}) \subseteq J$$

$$\begin{array}{cccccccc}
T^0(\{\}) & \cup & T^1(\{\}) & \cup \dots \cup & T^i(\{\}) & \cup \dots \\
\text{in} & & \text{in} & & \text{in} & \\
J & & J & & J & \\
\end{array}$$

$\subseteq$

$$J \cup J \cup \dots J$$

LEMMA Sia $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ continua. Sia $J = T(J)$ punto fisso di T

Allora, per ogni $i \geq 0$ $T^i(\{\}) \subseteq J$.

DIMOSTRAZIONE Per induzione.

Caso base $T^0(\{\}) \subseteq J$, banale perché $T^0(\{\}) = \{\}$

Caso induttivo $\underbrace{T^n(\{\}) \subseteq J}_{\text{ip. induttiva}} \implies T^{n+1}(\{\}) \subseteq J$

$$
\begin{aligned}
& T^{n+1}(\{\}) \\
= \quad & \{\text{def. di } T^k\} \\
& T(T^n(\{\})) \\
\subseteq \quad & \{T \text{ è monotona, Ip. induttiva: } T^n(\{\}) \subseteq J\} \\
& T(J) \\
= \quad & \{J \text{ è un punto fisso}\} \\
& J
\end{aligned}
$$

APPLICAZIONI del TEOREMA di RICORSIONE

$X = X \cup \{1\}$ possiamo scriverla come $X = T(X)$ $\longleftarrow$

dove $T(X) = X \cup \{1\}$. T è continua!

Calcoliamo il minimo punto fisso di T che ci è dato dal th. di ricorsione

$T^0(\{\}) = \{\}$

$T^1(\{\}) = T(T^0(\{\})) = T(\{\}) = \{\} \cup \{1\} = \{1\}$

$T^2(\{\}) = T(T^1(\{\})) = T(\{1\}) = \{1\} \cup \{1\} = \{1\}$

$T^3(\{\}) = T(T^2(\{\})) = T(\{1\}) = \{1\}$

$\vdots$

$T^i(\{\}) = \{1\}$ per ogni $i > \emptyset$

$\bigcup_{i \geq \emptyset} T^i(\{\}) = \{\} \cup \{1\} \cup \dots \cup \{1\} \cup \dots = \{1\}$

$T(X) = X \cup \{1\}$

$T(\{3,4,5\}) = \{3,4,5\} \cup \{1\}$
$= \{3,4,5,1\}$

Data $X = T(X)$ con T continua

se per qualche $k \geq \emptyset$ $T^k(\{\}) = T^{k+1}(\{\})$

allora $T^k(\{\})$ è il MINIMO PUNTO FISSO di T

$$T^{k+2}(\{\})$$

$$= T(T^{k+1}(\{\}))$$

$$= \{T^k(\{\}) = T^{k+1}(\{\})\}$$

$$T(T^k(\{\}))$$

$$= T^{k+1}(\{\})$$

Osservazione:

poiché $I = \bigcup_{i \geq \emptyset} T^i(\{\})$

ogni $T^i(\{\})$ è parte di I, è contenuto in I

- $T^i(\{\}) \subseteq I$ è una approssimazione di I
- poiché, per il lemma 1, $T^i(\{\}) \subseteq T^{i+1}(\{\})$ aumentando i, approssimo sempre meglio il minimo punto fisso.

$$P = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in P\} \qquad P = T(P)$$

$$T(X) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in X\}$$

<u>T è continua</u>

$$T^0(\{\}) = \{\}$$

$$T^1(\{\}) = T(T^0(\{\})) = T(\{\}) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in \{\}\} = \{\emptyset\} \cup \{\ \} = \{\emptyset\}$$

$$T^2(\{\}) = T(T^1(\{\})) = T(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\} \cup \{2\} = \{\emptyset, 2\}$$

$$T^3(\{\}) = T(T^2(\{\})) = T(\{\emptyset, 2\}) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in \{\emptyset, 2\}\} = \{\emptyset\} \cup \{2, 4\} = \{\emptyset, 2, 4\}$$

$$\subseteq \quad \subseteq$$

$$T^4(\{\}) = T(T^3(\{\})) = T(\{\emptyset, 2, 4\}) = \{\emptyset, 2, 4, 6\}$$

La soluzione è l'insieme dei numeri <u>pari</u>.

Teorema di ricorsione si applica a definizioni di insiemi date come soluzioni di equazioni del tipo

$$X = T(X)$$

con T continua. L'insieme definito dall'equazione è il MINIMO PUNTO FISSO di T.

- $T(X) = X \cup \{1\}$ l'equazione definisce $\{1\}$
- $T(X) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in X\}$ l'equazione definisce l'insieme dei naturali pari.

$$T(X) = \{1\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in X\}$$

definisce l'insieme dei numeri naturali dispari...

USO del TEOREMA di RICORSIONE per calcolare il linguaggio generato da una grammatica libera.

$G = < \Lambda, V, S, P >$

$\mathcal{L}(G)$ è l'insieme di tutte e sole le stringhe in Λ^* che sono frontiere di alberi di derivazione in G.

$S \to ab \mid aSb$

$\mathcal{L}(G) = \{ a^n b^n \mid n > 0 \}$

$$S = \{a\}\{b\} \cup \{a\} S \{b\}$$

insiemi di stringhe

$$S = T(S)$$

Operazione di CONCATENAZIONE TRA LINGUAGGI

$$AB = \{ \alpha\beta \mid \alpha \in A \wedge \beta \in B \}$$

Da GRAMMATICHE a EQUAZIONI ricorsive su insiemi di stringhe (LINGUAGGI)

CONCATENAZIONE TRA LINGUAGGI

$L_1, L_2 \subseteq \Lambda^*$. La CONCATENAZIONE $L_1 L_2 \subseteq \Lambda^*$ è definita come segue

$$L_1 L_2 = \{ \alpha\beta \mid \alpha \in L_1 \wedge \beta \in L_2 \}$$

TEOREMA La concatenazione è un'operazione CONTINUA.

$$T_L(X) = XL \quad \text{è continua}$$

Proprietà della concatenazione

$$L\{\} = \{ \alpha\beta \mid \alpha \in L \wedge \beta \in \{\} \} = \{\}$$

$$\{\} L = \{ \alpha\beta \mid \alpha \in \{\} \wedge \beta \in L \} = \{\}$$

$\{\}$ è lo ZERO per la concatenazione

$$L\{\varepsilon\} = \{ \alpha\beta \mid \alpha \in L \wedge \beta \in \{\varepsilon\} \} = \{ \alpha\beta \mid \alpha \in L \wedge \beta = \varepsilon \} = L$$

$$\{\varepsilon\} L = \{ \alpha\beta \mid \alpha = \varepsilon \wedge \beta \in L \} = L$$

$\{\varepsilon\}$ è l'UNO per la concatenazione

$L_1 = \{aa, b, aba\}$ $\qquad$ $L_2 = \{bb, abb, aa\}$

$L_1 L_2 = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L_1 \wedge \beta \in L_2\} = \{aabb, aaabb, aaaa, bbb, babb, baa, ababb, abaabb, abaaa\}$

$L_1 \cdot L_2 \neq L_2 L_1$ in generale non è commutativa !!

$L_2 L_1 = \{bbaa, bbb, bbaba, abbaa, abbb, abbaba, aaaa, aab, aaaba\}$

Sia $G = \langle \Lambda, V, S, P \rangle$ una grammatica libera.

$S \to ab \mid aSb$

ogni categoria sintattica diventa una variabile dell'equazione

ogni simbolo terminale diventa un linguaggio che contiene la sola stringa formata dal simbolo

$$\boxed{S = \{a\}\{b\} \cup \{a\}S\{b\}}$$

è del tipo $S = T(S)$

La "giustapposizione" di simboli nelle produzioni diventa l'operazione di concatenazione tra linguaggi

$$aSb \rightsquigarrow \{a\}S\{b\}$$

$$S \to ab \mid aSb \quad \rightsquigarrow \quad S = \{a\}\{b\} \cup \{a\}S\{b\}$$

$S = T(S)$ dove $T(X) = \{a\}\{b\} \cup \underbrace{\{a\}X\{b\}}$

$$T^0(\{\}) = \{\}$$

$$T^1(\{\}) = \{a\}\{b\} \cup \{a\}\{\}\{b\} = \{ab\} \cup \{\} = \{ab\}$$

$$T^2(\{\}) = T(\{ab\}) = \{a\}\{b\} \cup \{a\}\{ab\}\{b\} = \{ab\} \cup (\{a\}\{ab\})\{b\} =$$

$$= \{ab\} \cup \{aab\}\{b\} =$$

$$= \{ab, aabb\}$$

$$T^3(\{\}) = T(\{ab, aabb\}) = \{ab, aabb, aaabbb\}$$

$$T^i(\{\}) = \{a^k b^k \mid 0 < k \le i\}$$

$$S \to aS \mid aB$$
$$B \to b \mid bB$$

$$\begin{cases} S = \{a\}S \cup \{a\}B \\ B = \{b\} \cup \{b\}B \end{cases}$$

sistema di equazioni in 2 incognite (S, B)

$$\begin{cases} S = T_S(S, B) \\ B = T_B(\ \ B) \end{cases}$$

Per calcolare il linguaggio generato dobbiamo calcolare

$$\begin{cases} T_S^i(\{\}, \{\}) \\ T_B^i(\{\} \end{cases}$$

$$T_S^0(\{\}, \{\}) = \{\}$$
$$T_B^{\emptyset}(\{\}) = \{\}$$

$$T_S^1(\{\}, \{\}) = T_S(T_S^{\emptyset}, T_B^{\emptyset}) =$$
$$= T_S(\{\}, \{\}) =$$
$$= \{a\}\{\} \cup \{a\}\{\} = \{\}$$
$$T_B^1(\{\}) = \{b\} \cup \{b\}\{\} = \{b\}$$

$$T_S^2(\{\},\{\}) = T_S(T_S^1, T_B^1) = T_S(\{\}, \{b\})$$
$$= \{a\}\{\} \cup \{a\}\{b\} = \{ab\}$$

$$T_B^2(\{\}) = T_B(\{b\}) = \{b\} \cup \{b\}\{b\} = \{b, bb\}$$

$$T_S^3(\{\},\{\}) = T_S(T_S^2, T_B^2) = \underline{\{a\}}\{\underline{ab}\} \cup \{a\}\{b, bb\} =$$
$$= \{aab, ab, abb\}$$

$$\vdots$$

$$\bigcup_{i \geq 0} T_S^i(\{\}, \{\})$$ è il linguaggio generato dalla grammatica!!