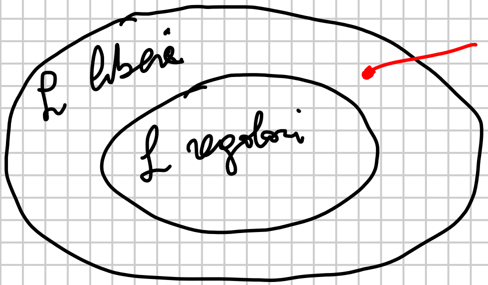
Grammatiche regolari $\equiv$ ASF




$\mathcal{L} = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ è libero ma non regolare

$S \to ab \mid aSb$

## Teoria dei LINGUAGGI FORMALI

PUMPING LEMMA

### Lemma

Se $\mathcal{L}$ è un linguaggio regolare
$\exists\, n \in \mathbb{N}$ tale che per tutte le stringhe
$w$ con $|w| \geq n$ valgono le seguenti proprietà
- $w = xyz$ tali che
1) $|xy| \leq n$
2) $y \neq \varepsilon$
3) $xy^i z \in \mathcal{L}$ per ogni $i \geq \emptyset$

$xz \in \mathcal{L}$ $\quad xyz \in \mathcal{L}$ $\quad xyyz \in \mathcal{L}$ $\quad xyyyz \in \mathcal{L}$ ....

$$\mathcal{L} = \{ a^k b^m \mid k, m > 0 \}$$

$n = 3$

$\underbrace{a}_{x}\underbrace{a}_{y}\underbrace{b}_{z} \in \mathcal{L} \qquad |aab| = 3 \geq n$

$|xy| = |aa| = 2 \leq n$

$y \neq \varepsilon$

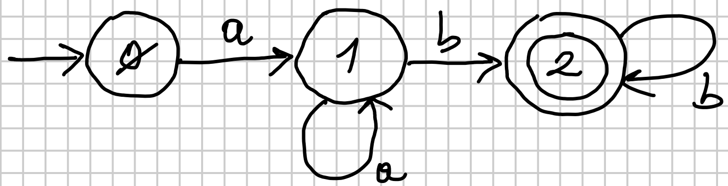
$i=0 \qquad xy^iz = xz = ab \in \mathcal{L}$

$i=1 \qquad xyz = aab \in \mathcal{L}$

$i=2 \qquad xyyz = aaab \in \mathcal{L}$

$i=3 \qquad xyyyz = aaaab \in \mathcal{L}$

$\vdots$




$0 \rightarrow a1$

$1 \rightarrow a1 \mid b2 \mid b$

$2 \rightarrow b2 \mid b$

NO $\underbrace{a}_{x}\underbrace{bb}_{y}$ $\qquad x = a \quad y = bb \quad z = \varepsilon$

$|xy| \leq 3$

$xy^0z = a \notin \mathcal{L}$

✓ $\underbrace{a}_{x}\underbrace{b}_{y}\underbrace{b}_{z}$ $\qquad ab \in \mathcal{L} \quad abbb \in \mathcal{L} \quad abbbb \in \mathcal{L}$

....

# DIMOSTRAZIONE del PUMPING LEMMA

(1) Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio regolare FINITO $\mathcal{L} = \{w_1, \dots, w_h\}$ $h \geq 0$

$\exists n \in \mathbb{N}. (\forall w \in \mathcal{L}. \ |w| \geq n \Rightarrow \dots\dots)$

$\mathcal{L} = \{ab, bab, aa\}$

$S \to aB \mid bC \mid aE$

$B \to b$

$C \to aD$

$D \to b$

$E \to a$

Sia $m$ la lunghezza massima delle stringhe del linguaggio

$m = \max\{|w_1|, \dots, |w_h|\}$

Sia $n = m + 1$

è banalmente vera

$\forall w \in \mathcal{L}. \ |w| \geq n \Rightarrow \dots$

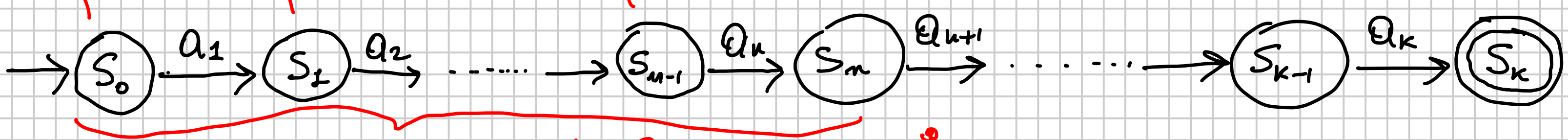
è sempre falsa quindi l'implicazione è vera

② $L$ linguaggio regolare infinito.
Essendo $L$ regolare, esiste un ASF che lo riconosce. Sia $A$ tale automa e sia $n$ il numero di stati dell'automa.

PRINCIPIO delle BUCHE dei PICCIONI
"Se ci sono $N$ buche e $N+1$ piccioni, due piccioni devono finire nella stessa buca"

Dato $A$ con $n$ stati, consideriamo una stringa $w = a_1 a_2 \dots a_k$ $\quad k \geq n$

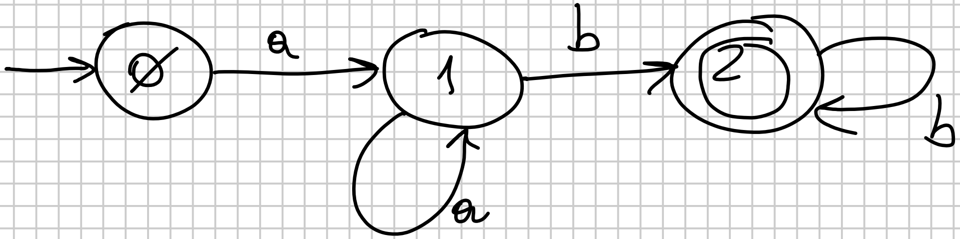
$w = a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} \dots a_k \in L$




quanti sono questi stati ?
$n+1$ !! in questa parte del cammino c'è almeno 1 stato ripetuto !!

| STATI dell'automa | $S_0$ | $S_1$ | $S_2$ | . . . . . . | $S_{n-1}$ | $S_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\emptyset$ | X | | | | | |
| 1 | | | | X | | |
| 2 | | X | | | | |
| ⋮ | | | X | | X | |
| | | | X | | | |
| $n-1$ | | | | | | X |

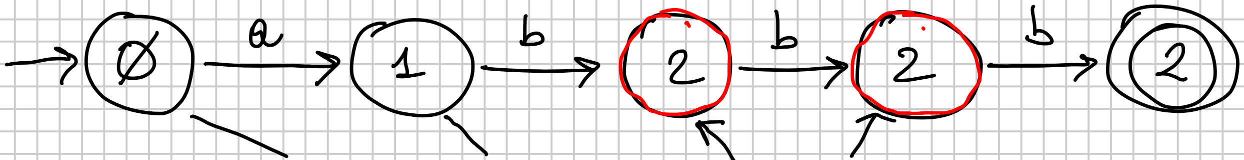
c'è almeno una riga con due X




$n = 3$

$w = abbb \qquad |w| \geq 3$

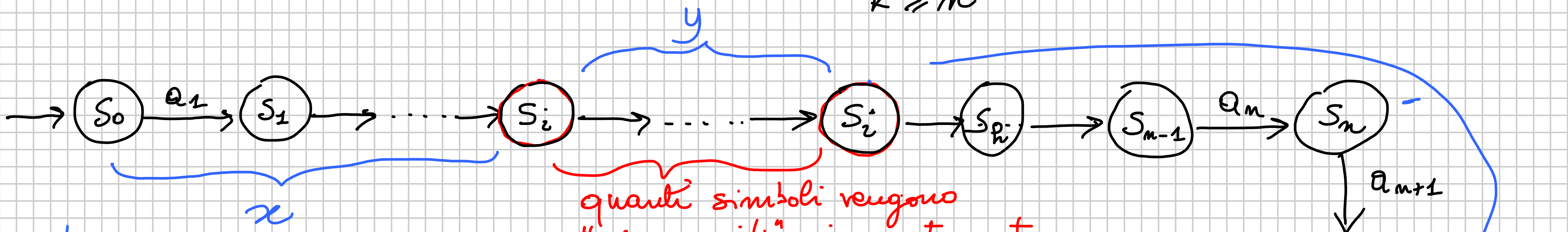
i primi $n$ simboli della stringa sono abb

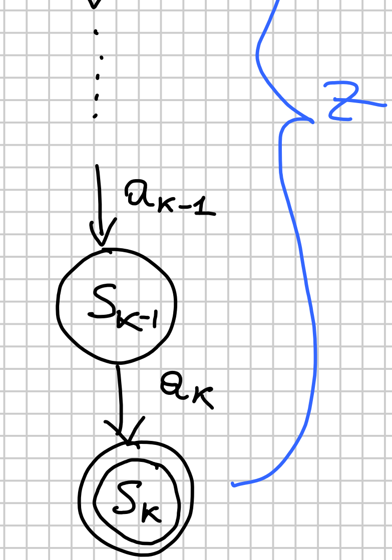



| | $S_0 = 0$ | $S_1 = 1$ | $S_2 = 2$ | $S_3 = 2$ |
|---|---|---|---|---|
| Ø | X | | | |
| 1 | | X | | |
| 2 | | | X | X |

Ridisegno il cammino di riconoscimento per $w = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n a_{n+1} \dots a_k$

$k \geq n$




quanti simboli vengono "riconosciuti" in questa parte del cammino?

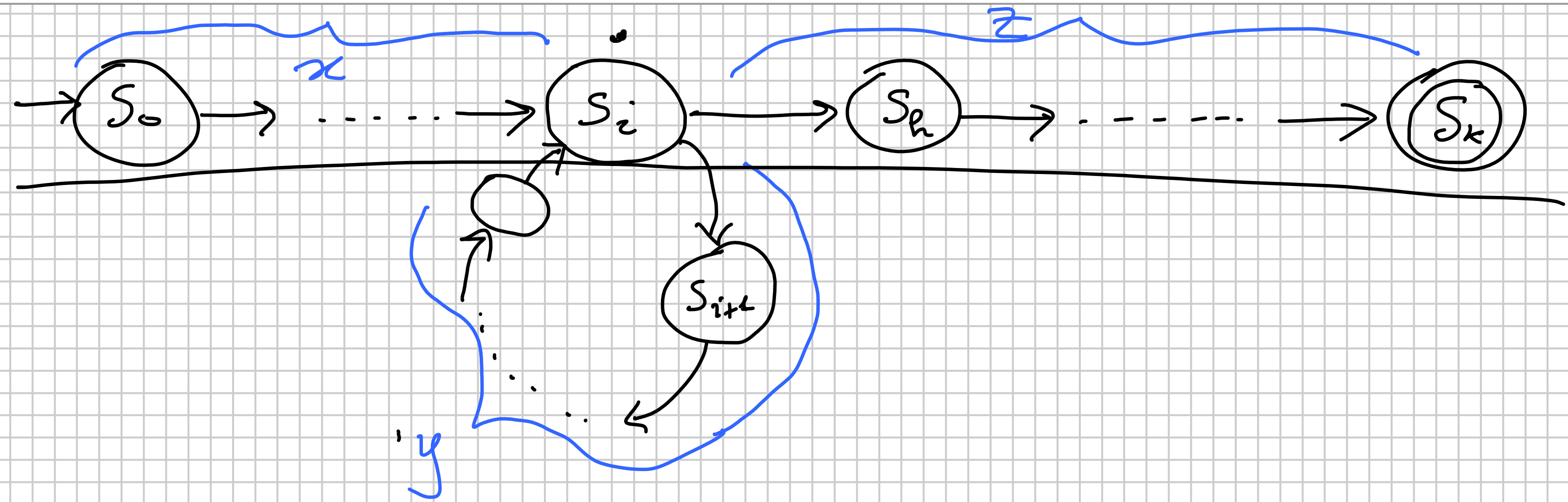
È possibile che non ci sia neanche un simbolo?

ALMENO 1 !!

- $|xy| \leq n$
- $|y| \neq \varepsilon$
- dobbiamo far vedere che

  $\forall i \geq 0.\ xy^iz \in L$

dobbiamo mostrare un cammino di riconoscimento di $xy^iz$ per ogni $i \geq \emptyset$.




Se ripeto il "ciclo" un numero arbitrario di volte ho comunque un cammino di riconoscimento

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ∅ | ripetizioni | del | ciclo | $xz$ | è | la stringa | riconosciuta | |
| 1 | " | " | " | $xyz$ | " | " | " | |
| 2 | " | " | " | $xyyz$ | " | " | " | |
| i | " | " | " | $x\underbrace{y\ldots y}_{i \text{ volte}}z$ | " | " | " | $xy^iz$ |

Titolo nota 09/10/2015

PUMPING LEMMA:

$\mathcal{L}$ è regolare $\Rightarrow$ ...... se $\mathcal{L}$ è regolare, allora .....

$$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$$

$$B: \exists n \in \mathbb{N}. \Big( \forall w \in \mathcal{L}.\ |w| \geq n \Rightarrow \exists x,y,z.\ w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge (\forall i \geq 0.\ xy^i z \in \mathcal{L}) \Big)$$

$\forall x.P$ si legge "per ogni individuo vale la proprietà P"

$\exists x.P$ si legge "esiste un individuo tale che P, o meglio per cui vale P"

Leggi del calcolo dei predicati

$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

$\neg \underline{\exists x.P} \equiv \underline{\forall x. \neg P}$

$\neg \underline{\forall x.P} \equiv \underline{\exists x. \neg P}$

$\neg (A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

$\neg (A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

$$\neg\Big(\exists n\in\mathbb{N}.\ \forall w\in\mathcal{L}.\ |w|\geq n \Rightarrow \exists x,y,z.\ w=xyz \wedge |xy|\leq n \wedge y\neq\varepsilon \wedge (\forall i\geq 0.\ xy^iz\in\mathcal{L})\Big)$$

$$\forall n\in\mathbb{N}.\ \neg\Big(\quad " \quad\quad " \quad\quad " \quad\Big)$$

$$\forall n\in\mathbb{N}.\ \exists w\in\mathcal{L}.\ \neg\Big(|w|\geq n \Rightarrow \exists x,y,z.\ w=xyz \wedge |xy|\leq n \wedge y\neq\varepsilon \wedge (\forall i\geq 0.\ xy^iz\in\mathcal{L})\Big)$$

$$\neg(C\Rightarrow D) \equiv \neg(\neg C \vee D) \equiv C \wedge \neg D$$

$$\forall n\in\mathbb{N}.\ \exists w\in\mathcal{L}.\Big(\underline{|w|\geq n} \wedge \neg\underbrace{\big(\exists x,y,z.\ w=xyz \wedge |xy|\leq n \wedge y\neq\varepsilon \wedge (\forall i\geq 0.\ xy^iz\in\mathcal{L})\big)}\Big)$$

preso un qualunque naturale

posso trovare una stringa del linguaggio tale che:

1) la lunghezza della stringa è $\geq n$

2) non è possibile suddividere la stringa in 3 parti in modo che siano soddisfatte le 3 condizioni del P.L. $|xy|\leq n \wedge \ldots\ldots$

Titolo nota 09/10/2015

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ \exists w \in \mathcal{L}.\ \left( |w| \geq n \wedge \left( \forall x,y,z.\ \neg \left( w = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge y \neq \varepsilon \wedge \left( \forall i \geq 0.\ xy^i z \in \mathcal{L} \right) \ldots \right) \right) \right)$$

$$=$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}.\ \exists w \in \mathcal{L}.\ \left( |w| \geq n \wedge \left( \forall x,y,z.\ \left( \underbrace{\underline{w = xyz} \wedge \underline{|xy| \leq n} \wedge \underline{y \neq \varepsilon}} \Rightarrow \exists i \geq 0.\ \underline{xy^i z \notin \mathcal{L}} \right) \ldots \right) \right)}$$

$$\mathcal{L} = \{ a^n b^n \mid n > \emptyset \}$$

Titolo nota 09/10/2015

$\mathcal{L} = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ dimostriamo che non è regolare

- $\forall n \in \mathbb{N}.\ P$ Sia $n$ un numero naturale ARBITRARIO

- $P$ è: $\exists w \in \mathcal{L}.\ (|w| \geq n \wedge \forall x, y, z.\ w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq n \Rightarrow \exists i.\ xy^i z \notin \mathcal{L})$

$\exists w \in \mathcal{L}.\ Q$ ? devo individuare (cioè scegliere) una stringa $w$ nel linguaggio e dimostrare che vale $Q$.

Sia $w = a^n b^n$ $\quad |w| = |a^n b^n| = 2n \geq n$

devo mostrare che:

qualunque suddivisione $w = xyz$ per cui valgono $\underline{y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq n}$ mi consenta di individuare $i \geq 0$ tale che $xy^i z \notin \mathcal{L}$

$w = a^n b^n$

Sia $w = xyz$ con $|xy| \leq n \wedge y \neq \varepsilon$, arbitraria

1) $|xy| \leq n$ implica

$$x = a^h \qquad y = a^k \qquad \text{con } h + k \leq n$$

2) $y \neq \varepsilon$ implica $k \geq 1$

3) $z = a^t b^n$

con $\underline{h + k + t = n}$

Consideriamo la stringa $xy^0z$

$$xy^0z = xz = a^h a^t b^n = a^{h+t} b^n$$

ma $\underline{h+t+k=n} \wedge k \geq 1 \Rightarrow h+t < n$

quindi $xy^0z \notin L$