

INDUZIONE BEN FONDATA $(A, <)$ ben fondata

Titolo nota

10/9/2015

true $\Rightarrow P(m) \equiv P(m)$

$(\forall m \in A.$ *supponiamo m minimale* *false*

true $\equiv (\forall m \in A. (m < n \Rightarrow P(m)) \Rightarrow P(m)$

supponiamo vero le proprietà su tutti gli elementi che precedono m

$\Rightarrow (\forall m \in A. P(m))$

sulle base di questa supposizione riusciamo a dimostrare le proprietà su m

che cosa dice queste formule sugli elementi m minimali

$$f(m, m) = \begin{cases} m & \text{se } m = 0 \\ m+1 & \text{se } m = 1 \\ f(m-1, m) + 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(\forall m, m \in \mathbb{N}. f(m, m) = m + m) \quad \text{per induzione ben fondata}$$

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, <)$$

precedenze
funzione

INDOTTA delle definizioni di
 \hookrightarrow l'argomento della CHIAMATA RICORSIVA
 \parallel precede l'argomento della funzione

$$f(m, m) = \begin{cases} m & \text{se } m = 0 \\ m+1 & \text{se } m = 1 \\ f(m-1, m) + 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(\forall m, m \in \mathbb{N}. f(m, m) = m + m) \quad \text{per induzione ben fondata}$$

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, <)$$

precedenze
funzione

INDOTTA delle definizioni di
 \hookrightarrow l'argomento della CHIAMATA RICORSIVA
 \parallel precede l'argomento della funzione

$$f(m, m) = \begin{cases} m & \text{se } m = 0 \\ m+1 & \text{se } m = 1 \\ f(m-1, m) + 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(\forall m, m \in \mathbb{N}. f(m, m) = m + m) \quad \text{per induzione ben fondata}$$

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, <) \text{ in formalmente } (m-1, m) < (m, m)$$

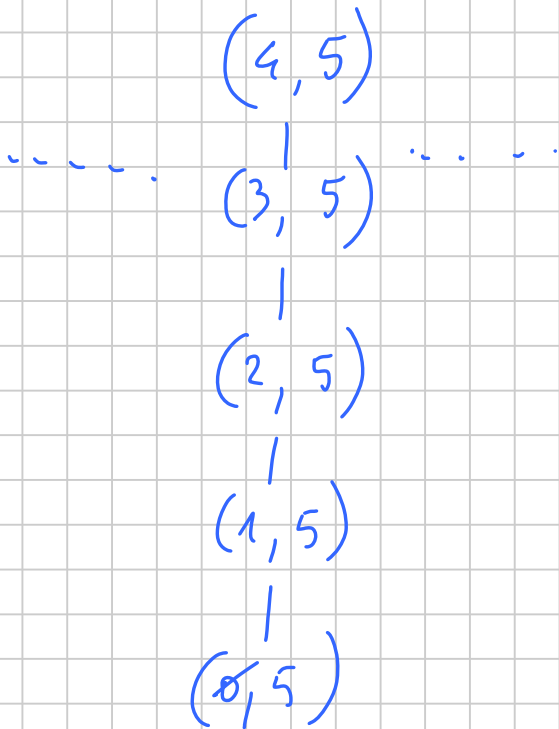
formalmente

$$(\forall m, m, m', m' \in \mathbb{N}. (m, m) < (m', m') \equiv$$

$$\left((m = m' \wedge m = m' - 1) \right) \equiv \left(m = m' \wedge m' = m + 1 \right)$$

$(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, <)$
 è ben fondato?

$(\forall n, m, m', m' \in \mathbb{N}. (n, m) < (m', m') \equiv (n = m' - 1 \wedge m = m'))$



infiniti elementi minimali delle
 rel. di precedenza $<$

$$(\forall n, m \in \mathbb{N}. \underline{f(n, m) = n + m})$$

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, <)$$

$$\begin{matrix} (n+1, m) \\ (n, m) \end{matrix}$$

24/09/2015

$$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(n-1, m)$$

⋮

$$(\emptyset, m)$$

$$f(n, m) = \begin{cases} m & \text{se } n = \emptyset \\ f(n-1, m) + 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Case base (indefinito)

$$f(\emptyset, m) = \emptyset + m$$

$$f(\emptyset, m) = \{ \text{def } f, 1^{\circ} \text{ caso} \}$$

$$= \{ \text{calcolo} \}$$

$$\emptyset + m$$

Case induttivo

$$f(n, m) = n + m \Rightarrow f(n+1, m) = (n+1) + m$$

ip. induttiva

$$f(n+1, m) = \{ \text{def. } f, 2^{\circ} \text{ caso} \}$$

$$f(n, m) + 1$$

$$= \{ \text{ip. induttiva} \}$$

$$n + m + 1$$

$$= \{ \text{calcolo} \}$$

$$(n+1) + m$$

Definire ricorsivamente una funzione. Come faccio?

Utilizzando l'induzione ben fondata.

$$\left(\forall n, m \in \mathbb{N}. f(n, m) = 3n + m + 1 \right)$$

$$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(n, m)$$

$$(n-1, m)$$

⋮

$$(\emptyset, m)$$

$$\left(\forall n, m, n', m'. (n, m) < (n', m') \equiv \right. \\ \left. (m = m' \wedge n = n' - 1) \right)$$

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}. f(m, n) = 3 \cdot m + n + 1)$$

$$f(m, n) = \begin{cases} n+1 & \text{se } m=0 \\ f(m-1, n) + 3 & \text{altrimenti} \\ & (n > 0) \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} (n, n) \\ | \\ (n-1, n) \\ | \\ \vdots \\ | \\ (0, n) \end{array}$$

Caso base $f(0, n) = 3 \cdot 0 + n + 1$ | Caso induttivo $f(m, n) = 3m + n + 1 \Rightarrow f(m+1, n) = 3 \cdot (m+1) + n + 1$

$f(0, n)$
 = { def. f , 1° caso }
 $n+1$
 = { calcolo } $3 \cdot 0 + n + 1$

$f(m+1, n)$
 = { def. f , 2° caso }
 $f(m, n) + 3$
 = { ip. ind. }
 $3 \cdot m + n + 1 + 3$

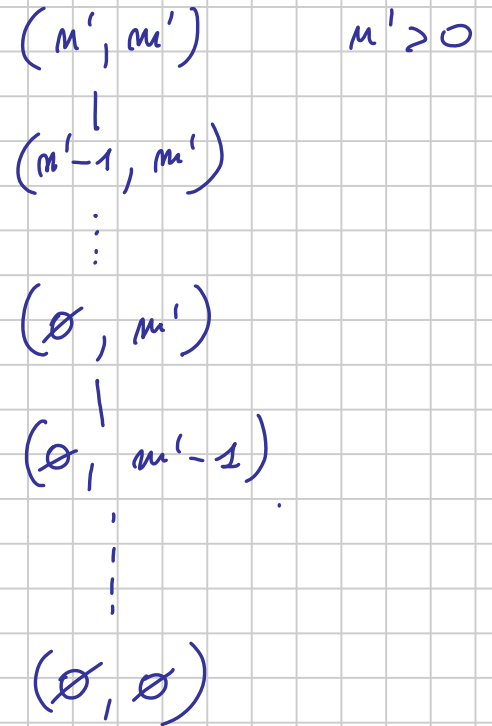
$= 3 \cdot (m+1) + n + 1$

$$\left(\forall m, m. f(m, m) = \underline{3 \cdot m + m + 1} \right) \quad (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sqsubseteq)$$

$$\left(\forall m, m, m', m' \in \mathbb{N}. (m, m) \sqsubseteq (m', m') \equiv \right.$$

$$\left(\underline{(m' > 0 \wedge m = m' - 1 \wedge m = m')} \vee \right.$$

$$\left. \underline{(m' = 0 \wedge m = m' \wedge m = m' - 1)} \right)$$



Caso base $m=0$ e $m=0$

Casi induttivi $m > 0$

$m = 0$ e $m > 0$

$$f(m, m) = \begin{cases} f(m-1, m) \dots \\ f(m, m-1) \dots \end{cases}$$

$$(\forall m, n. f(m, n) = 3 \cdot m + n + 1)$$

$$f(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{se } m=0 \text{ e } n=0 \\ f(m-1, n) + 3 & \text{se } m > 0 \\ f(m, n-1) + 1 & \text{se } m=0 \text{ e } n > 0 \end{cases}$$

ip. indutt.

Caso induttivo: $m > 0$

$$f(m-1, n) = 3 \cdot (m-1) + n + 1$$

$$\Rightarrow f(m, n) = 3 \cdot m + n + 1$$

$$f(m, n) = \{ \text{def. } f, m > 0, 2^\circ \text{ caso} \}$$

$$f(m-1, n) + 3$$

$$= \{ \text{ip. induttiva} \}$$

$$3 \cdot (m-1) + n + 1 + 3$$

$$= \{ \text{calcolo} \}$$

$$3 \cdot m + n + 1$$

Caso base $f(0, 0) = 3 \cdot 0 + 0 + 1$

⋮

Caso induttivo 2° ind. $m > 0$

$$f(0, n-1) = 3 \cdot 0 + (n-1) + 1 \Rightarrow f(0, n) = 3 \cdot 0 + n + 1$$

$$f(0, n) = \{ \text{def } f, 3^\circ \text{ caso} \}$$

$$f(0, n-1) + 1$$

$$= \{ \text{ip. induttiva} \}$$

$$3 \cdot 0 + (n-1) + 1 + 1$$

$$= \{ \text{calcolo} \}$$

$$3 \cdot 0 + n + 1$$

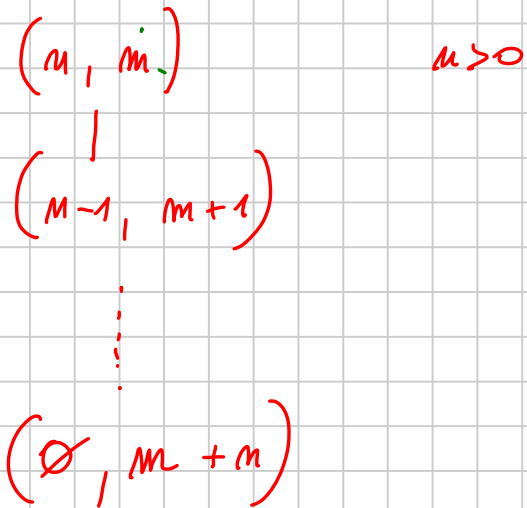
$$\left(\forall m, m' \in \mathbb{N}. \quad \underline{f(m, m') = 3 \cdot m + m' + 1} \right)$$

$$\left(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sqsubseteq \right)$$

$$\left(\forall m, m', m'', m'' \in \mathbb{N}. \quad (m, m') \sqsubseteq (m'', m'') \equiv \right. \\ \left. \left(m = m'' - 1 \wedge m' = m'' + 1 \right) \right)$$

precedente \sqsubseteq
è ben fondata su
 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

Sì!



$$(\forall n, m \in \mathbb{N}. f(n, m) = 3 \cdot n + m + 1) \quad \square$$

$$f(n, m) = \begin{cases} m+1 & \text{se } n=0 \\ f(n-1, m+1) + 2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Coro base $f(0, m) = 3 \cdot 0 + m + 1$

ovvio

Coro induttivo

ip. indutt. $n-1 \neq \emptyset$

$$f(n-1, m+1) = 3 \cdot (n-1) + (m+1) + 1 \Rightarrow$$

$$f(n, m) = 3 \cdot n + m + 1$$

$$f(n, m) = \{ \text{def. } f, 2^\circ \text{ caso} \}$$

$$f(n-1, m+1) + 2 = \{ \text{ip. induttiva} \}$$

$$3 \cdot (n-1) + (m+1) + 1 + 2$$

$$= \{ \text{calcolo} \}$$

$$3 \cdot n + m + 1$$

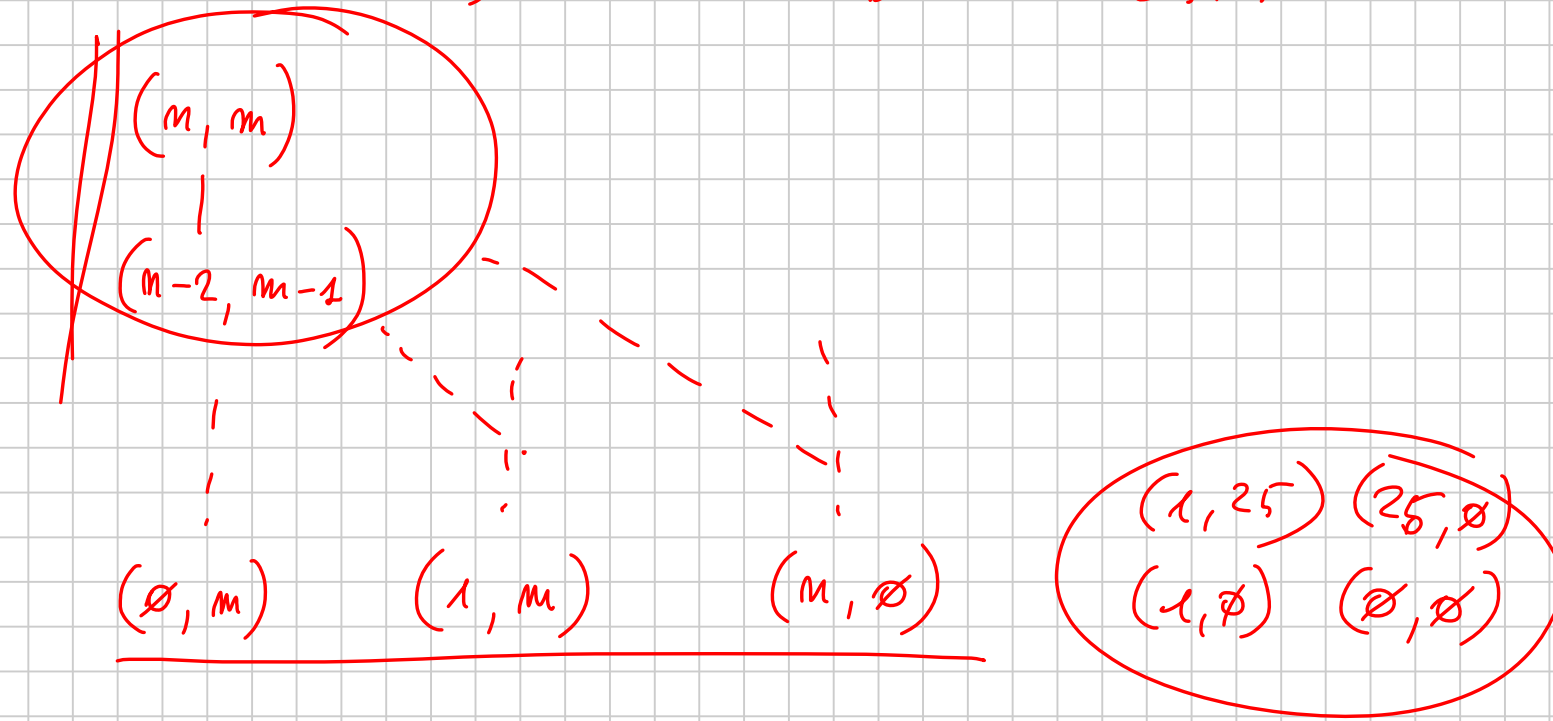
$$= 3n - 3 + m + 1 + 1 + 2$$

$$= 3n + m - 1 + 2$$

$$(\forall n, m. f(n, m) = 3 \cdot n + m + 1) \quad \leftarrow$$

$$(\forall n, m, n', m' \in \mathbb{N}. (n, m) \leftarrow (n', m') \equiv (m = n' - 2 \wedge m = m' - 1))$$

BEN FONDATA



$$\underline{(\forall m, n \in \mathbb{N}. f(m, n) = 3m + n + 1)}$$

$$f(n, m) = \begin{cases} m+1 & \text{se } n=0 \text{ e } m \geq 0 \\ m+4 & \text{se } n=1 \text{ e } m \geq 0 \\ 3m+1 & \text{se } n=0 \\ f(m-2, m-1) + 7 & \text{altrimenti: } (m > 1 \text{ e } m \geq 0) \end{cases}$$

ip. induttiva

Casi base

$$f(0, m) = 3 \cdot 0 + m + 1$$

$$f(1, m) = 3 \cdot 1 + m + 1$$

$$f(n, 0) = 3 \cdot n + 0 + 1$$

OUV

Caso induttivo $(m > 1 \text{ e } m \geq 0)$

$$\Rightarrow f(m-2, m-1) = 3 \cdot (m-2) + (m-1) + 1 \Rightarrow f(m, m) = 3 \cdot m + m + 1$$

$$f(m, m) = \{ \text{def. } f, m > 1 \text{ e } m \geq 0, 2^\circ \text{ caso} \}$$

$$= \{ \text{calcolo} \} \\ \underline{3 \cdot m + m + 1}$$

$$f(m-2, m-1) + 7$$

$$= \{ \text{ip. induttiva} \}$$

$$3 \cdot (m-2) + (m-1) + 1 + 7$$

$$\underline{3m - 6 + m - 1 + 1 + 7}$$