PROGRAMMAZIONE 2
15bis. OCaML: un veloce ripasso

Lo stile funzionale

- In Java (ma anche in C) l'effetto osservabile di un programma è la **modifica** dello stato

```
temp = pair.x;
pair.x = pair.y;
pair.y = temp;
```

- In OCaML il risultato della computazione è la ***produzione*** di un nuovo valore

```
let x = 5 in (x,x)
```

Value-oriented programming

- Programmazione funzionale: “value-oriented programming”
  - un programma OCaML è una espressione
  - una espressione OCaML denota un valore
- L’esecuzione di un programma OCaML può essere vista come una sequenza di passi di calcolo (semplificazioni di espressioni) che alla fine produce un valore

Espressioni

- Sintassi: regole di buona formazione
- Semantica
  - regole di **type checking** (tipo o errore)
  - **regole di esecuzione** che garantiscono che espressioni tipate producono un valore

Valori

- Un valore è una espressione che non deve essere valutata ulteriormente
  - **34** è un valore di tipo **int**
  - **34+17** è un'espressione di tipo i**nt** ma non è un valore

Valore di una espressione

- La notazione <exp> ⇒ <val> indica che l'espressione <exp> quando valutata calcola il valore <val>

  3 ⇒ 3 (valori di base)
  3+4 ⇒ 7
  2*(4+5) ⇒ 18

eval(e) = v meta-notazione per **e ⇒ v**

Dichiarazioni: let

- **Sintassi: let x = e1 in e2**
  - **x** *identifier*
  - **e1**, **e2** *espressioni*
  - **let x = e1 in** espressione
  - **x = e1** *binding*
- **let** x = 2 **in** x + x
  let inc x = x + 1 **in** inc 10
  let y = "programmazione" **in** (**let** z = " 2" **in** y^z)

Espressioni: let

- Sia **e** l'espressione **let x = e1 in e2**
- **Regola di valutazione**
  - **eval (e1) = v1**
  - sostituire il valore v1 per tutte le occorrenze di x in e2 ottenendo l'espressione e2'
  - **subst(e2 , x, v1) = e2'**
  - **eval(e2') = v**
  - **eval(e) = v**

Regola di valutazione: let

$$\frac{eval(e1) = v1 \;\; subst(e2, x, v1) = e2' \;\; eval(e2') = v}{eval(let \; x = e1 \; in \; e2) = v}$$

Esempio

- **eval(let x = 1 + 4 in x * 3)**
  - eval(1 + 4) = 5
- **eval(let x = 5 in x*3)**
  - subst(x * 3, x, 5) = 5 * 3
  - eval(5 * 3) = 15
- **eval(let x = 1 + 4 in x * 3) = 15**

let binding = scope


```
let x = 42 in
      (* y non è visibile *)
      x + (let y = "3110" in
            (* y è visibile *)
            int_of_string y)
```

scope: overlapping


```
let x = 5 in ((let x = 6 in x) + x)
```

due casi

```
((let x = 6 in x) + 5)
```

```
((let x = 6 in 5) + 5)
```

scope: overlapping

```
let x = 5 in ((let x = 6 in x) + x)
```

due casi

```
((let x = 6 in x) + 5)
```

```
((let x = 6 in 5) + 5)
```

scope: overlapping

```
let x = 5 in ((let x = 6 in x) + x)
```

due casi

```
((let x = 6 in x) + 5)
```

```
((let x = 6 in 5) + 5)
```

Alpha conversione

- L'identità puntuale delle variabili legate non ha alcun senso!!
- In matematica
  - f(x) = x * x
  - f(y) = y * y

  sono la medesima funzione!!
- In informatica
  - **let** x = 5 **in** ((**let** x = 6 **in** x) + x)
  - **let** x = 5 **in** ((**let** y = 6 **in** y) + x)

Dichiarazione di funzioni

```
let f (x : int) : int =
    let y = x * 10 in
        y * y;;
```

Funzioni Ricorsive

```
let rec pow x y =
    if y = 0 then 1
    else x * pow x (y - 1);;
```

Applicazione di funzioni


```
let f (x : int) : int =
    let y = x * 10 in
        y * y;;

f 5;;
- : int = 2500
```

Applicazione di funzioni


```
let rec pow x y =
    if y = 0 then 1
    else x * pow x (y - 1);;

pow 2 3;;
-: int 8
```

Dichiarazione

- La valutazione di una dichiarazione di una funzione è la funzione stessa
  - le funzioni sono valori

Applicazione di funzione

- **eval(e0 e1 ... en) = *v'* se**
  - **eval*(e0)* = *let f x1 ... xn = e***
  - **eval*(e1)* = *v1 ... eval(en)= vn***
  - ***subst(e , x1, …, xn, v1, ..., vn) = e'***
  - **eval*(e')* = *v'***

Esempi

- `let double(x : int) : int = 2 * x;;`
- `let square(x : int) : int = x * x;;`
- ```
  let quad(x : int) : int =
                      double (double x);;
  ```
- ```
  let fourth (x : int) : int =
                     square (square x)
  ```

Esempi

-
```
let twice((f : int -> int),(x : int)):
                int = f (f x)
```

-
```
let quad(x : int) : int =
                   twice (double, x)
```
-
```
let fourth(x : int) : int =
                  twice(square, x)
```

- *twice*
  - *higher-order function*: una funzione da funzioni ad altri valori

OCaML Liste

- `let lst = [1; 2; 3];;`
- `let empty = [];;`
- `let longer = 5::lst;;`
- `let another = 5::1::2::3::[]`

Liste: sintassi

- `[ ]` la lista vuota
  - nil derivato dal LISP
- **e1::e2** inserisce l'elemento **e1** in testa alla lista **e2**
  - :: = LISP cons
- [e1; ...; en] notazione sintattica per la lista e1::...::en::[]

Accedere a una lista

- Strutturalmente una lista può essere
  - `[]` la lista vuota
  - la lista ottenuta mediante una operazione di cons di un elemento a una lista

- *Usare il pattern matching* per accedere agli elementi della lista
-
```
let empty lst = match lst with
        [] -> true
      | h::t -> false
```

Ricorsione sulle liste

-
```
let rec sum xs = match xs with
        [] -> 0
      | h::t -> h + sum t
```
-
```
let rec concat ss = match ss with
      [] -> ""
      | s::ss' -> s ^ (concat ss')
```
-
```
let rec append lst1 lst2 = match lst1 with
      [] -> lst2
      | h::t -> h::(append t lst2)
```

Pattern Matching


- ```
  match e with
          p1 -> e1
        | p2 -> e2
        | ...
        | pn -> en
  ```

- Le espressioni **pi** si chiamano *pattern*
  ```

Pattern Matching

- Il pattern `[ ]` "match" solamente il valore `[ ]`
-
```
match [ ] with
                [ ] -> 0
                | h::t -> 1
```
(* restituisce il valore 0 *)

-
```
match [ ] with
                [ ] -> 1
                | h::t -> 0
```
(* restituisce il valore 1*)

Pattern Matching

- Il pattern `h::t` "match" una qualsiasi lista con almeno un elemento, e inoltre ha l'effetto di legare quell'elemento alla variabile `h` e la lista rimanente alla variabile `h`

-
```
match [1; 2; 3] with
        [] -> 0
      | h::t -> h
          (* restituisce il valore 1 *)
```
-
```
match [1; 2; 3] with
        [] -> []
      | h::t -> t (* restituisce il valore [2; 3] *)
```

Altri esempi: liste

- Il pattern `a::[]` "match" tutte le liste con esattamente un elemento
- Il pattern `a::b` "match" tutte le liste con almeno un elemento
- Il pattern `a::b::[]` "match" tutte le liste con esattamente due elementi
- Il pattern `a::b::c::d` "match" tutte le liste con almeno tre elementi

Un esempio più complicato

-
```
let rec drop_val v lst = match lst with
        [] -> []
      | h::t ->
            let t' = drop_val v t in
            if h = v then t' else h::t'
```

Un altro esempio

- ```
  let rec max_list = function
          [] -> ???
      | h::t -> max h (max_list t)
  ```

- Cosa mettiamo al posto di ??? ?
  - **min_int** è una scelta possibile ...
  - o sollevare una exception ...
- In Java, avremmo potuto restituire **null**...
  - …ma siamo in OCaML, che ci fornisce una altra soluzione
  ```

Option type

```
let rec max_list = function
        [] -> None
    | h::t -> match max_list t with
            | None -> Some h
            | Some x -> Some (max h x)

(* max_list : 'a list -> 'a option *)
```

Iteratori

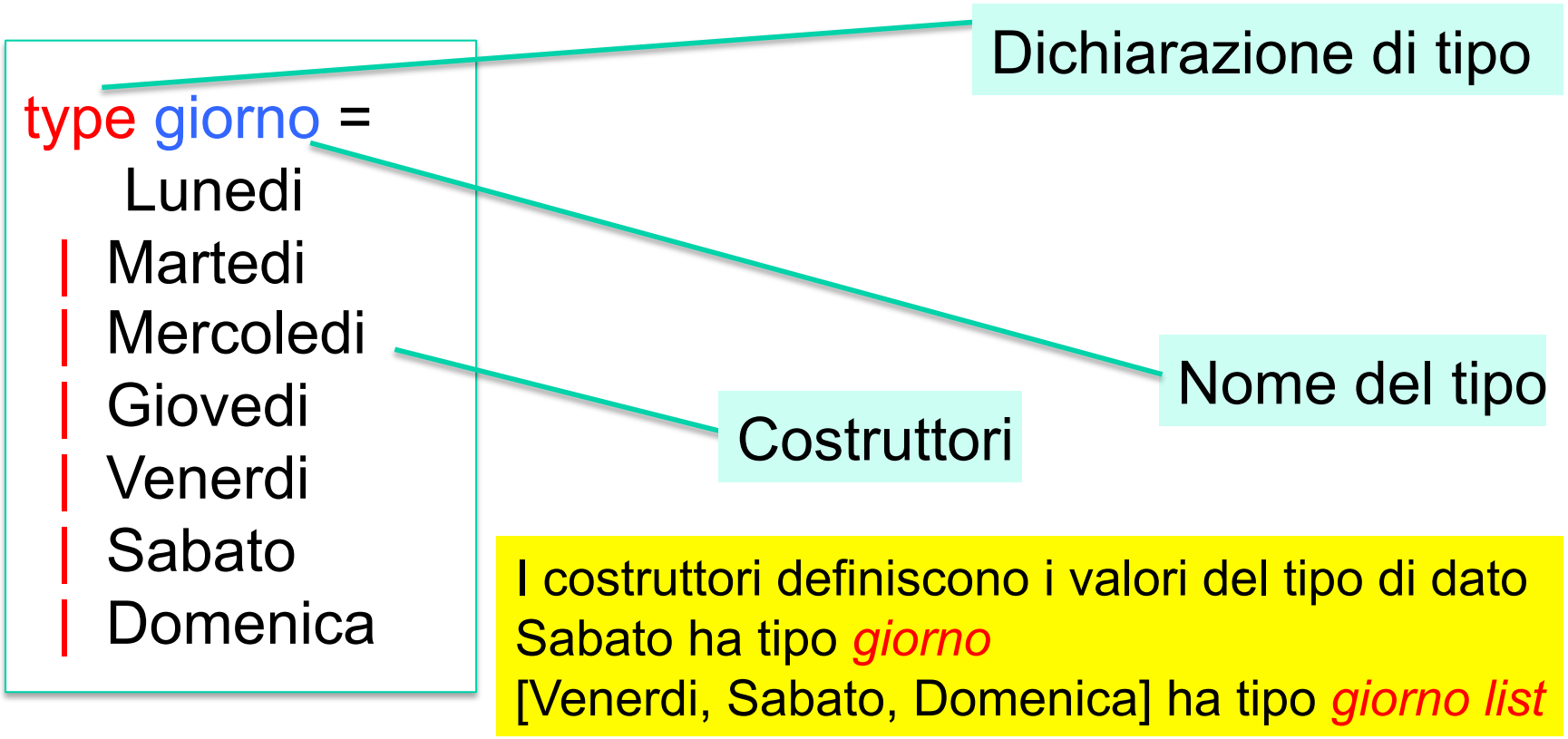
- ```
  let rec map f = function
          [] -> []
      | x::xs -> (f x)::(map f xs)
  ```

Parametro impicito di tipo lista

(map : ('a -> 'b) -> 'a list -> 'b list)
  ```

Definire tipi di dato in OCaML

OCaML permette al programmatore di definire *nuovi* tipi di dato



Pattern Matching

Il pattern matching fornisce un modo efficiente per accedere ai valori di un tipo di dato

```
let string_of_g (g : giorno) : string =
     match g with
            Lunedi -> "Lunedi"
          | Martedi -> "Martedi"
          | :
          | Domenica -> "Domenica"
```

Il pattern matching **segue** la struttura sintattica dei valori del tipo di dato: i costruttori

Astrazioni sui dati

- Avremmo potuto rappresentare il tipo di dato *giorno* tramite dei semplici valori interi
  - Lunedi = 1, Martedi = 2, …, Domenica = 7
- Ma…
  - il tipo di dato primitivo *int* fornisce un insieme di operazioni differenti da quelle significative sul tipo di dato *giorno*, Mercoledi – Domenica *non* avrebbe alcun senso
  - esistono un numero maggiore di valori interi che di valori del tipo giorno
- Morale: i linguaggi di programmazione moderni (Java, OCaML, C#, C++, …) forniscono strumenti per definire tipi di dato

OCaML Type

- I costruttori possono trasportare “valori”

Dichiarazione da valutare

```
# type foo =
        Nothing
    | Int of int
    | Pair of int * int
    | String of string;;
```

Risultato

```
type foo = Nothing | Int of int | Pair of int * int | String of string
```

Valori del tipo `foo`

```
Nothing
Int 3
Pair (4, 5)
String "hello"...
```

Pattern matching

```
let get_count (f : foo) : int =
    match f with
            Nothing -> 0
          | Int(n) -> n
          | Pair(n,m) -> n + m
          | String(s) -> 0
```

Tipi di dato ricorsivi

```
# type tree =
        Leaf of int
      | Node of tree * int * tree;;

type tree = Leaf of int|Node of tree * int * tree
```

```
let t1 = Leaf 3
let t2 = Node(Leaf 3, 2, Leaf 4)
let t3 = Node(Leaf 3, 2,Node(Leaf 5, 4,Leaf 6))
```

Tipi di dato ricorsivi

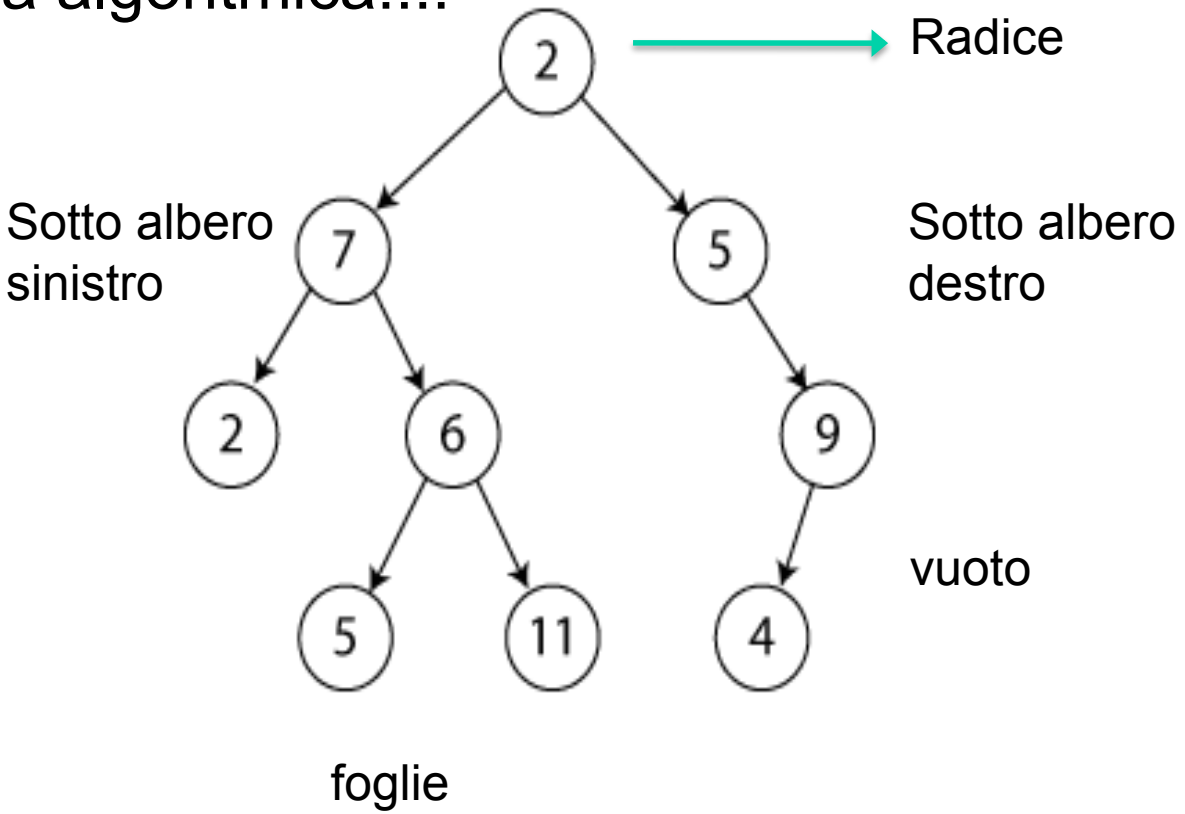
```
# type tree =
        Leaf of int
    | Node of tree * int * tree;;


type tree =Leaf of int|Node of tree * int * tree
```

Quanti di voi hanno programmato con strutture dati del tipo *tree*?

Alberi binari

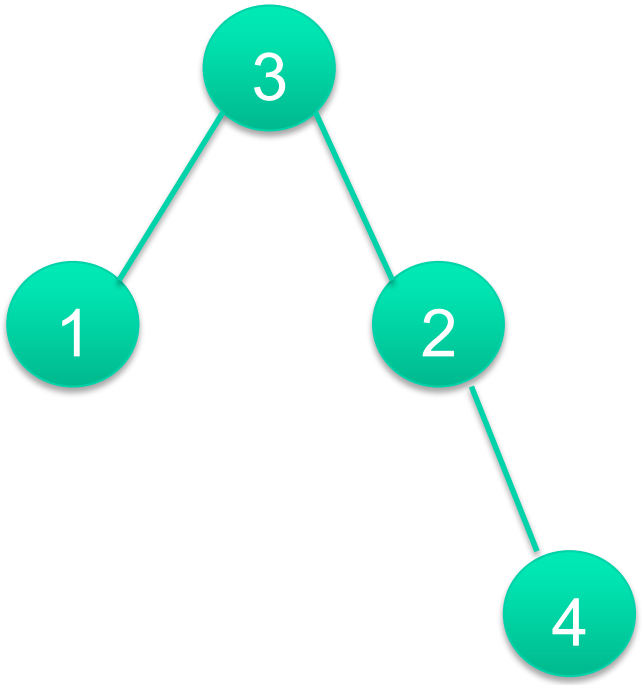
Li avete visti a algoritmica!!!!



Alberi binari in OCaML

```
# type tree =
        Empty
      | Node of tree * int * tree;;
```

```
let t : tree  =
Node(Node(Empty,1, Empty),
3,
Node(Empty,2, Node(Empty,
4,Empty)))
```



Ricerca in un albero

```
let rec contains (t : tree) (n : int):  bool
=
    match t with
            Empty -> false
        | Node (lt, x, rt) ->
                                    x = n ||
            (contains lt n) || (contains rt n)
```

La funzione `contains` effettua una ricerca del valore n sull'albero t

Caso peggiore: deve visitare tutto l'albero

Alberi binari di ricerca

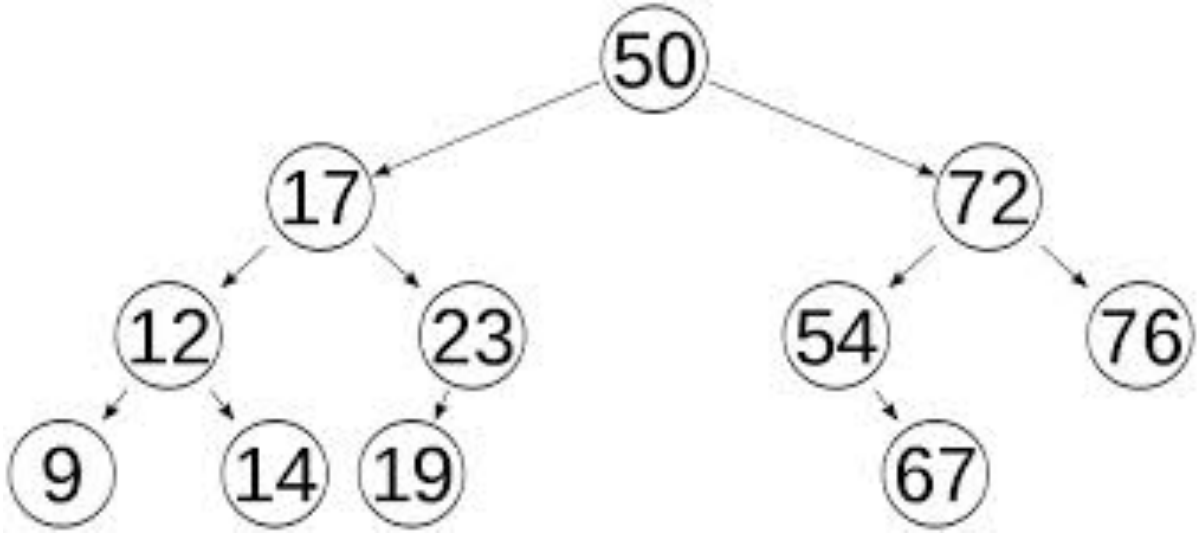
Idea: ordinare i dati sui quali viene fatta la ricerca

Un albero binario di ricerca (BST) è un albero binario che deve soddisfare alcune proprietà invarianti addizionali

INVARIANTE DI RAPPRESENTAZIONE

- `Node` (lt, x, rt) è un BST se
  - lt e rt sono BST
  - tutti i nodi di lt contengono valori < x
  - tutti i nodi di rt contengono valori > x
- `Empty` (l'albero vuoto) è un BST

Esempio



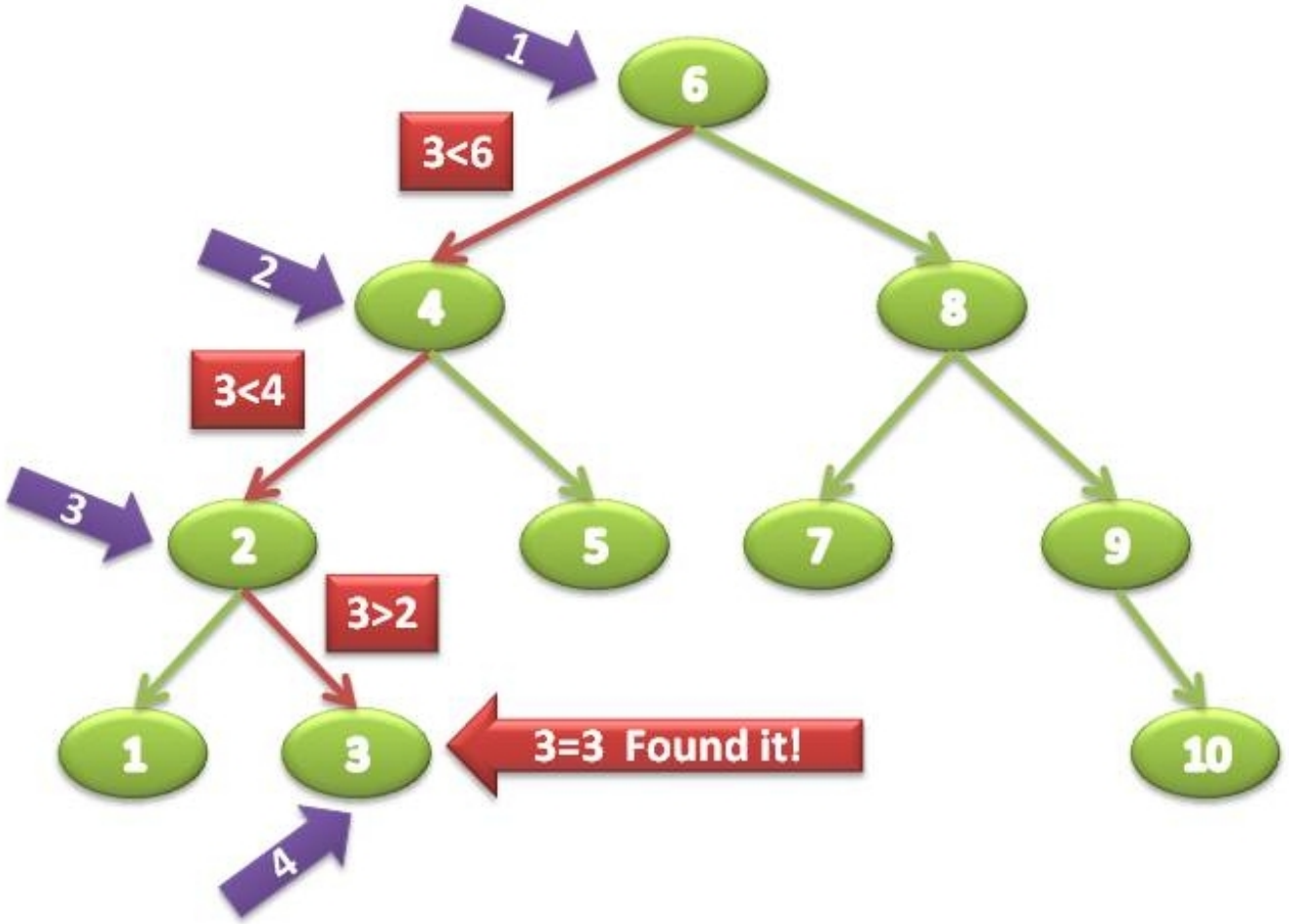
L'invariante di rappresentazione dei BST è soddisfatto
Come si dimostra?

Ricerca su un BST

```
(* Ipotesi: t è un BST *)
let rec lookup (t : tree) (n : int) : bool =
    match t with
          Empty -> false
        | Node (lt, x, rt) ->
            if x = n then true
            else if n < x then (lookup lt n)
                          else (lookup  rt n)
```

Osservazione 1: L'invariante di rappresentazione guida la ricerca
Osservazione2: La ricerca può restituire valori non corretti se applicata a un albero che non soddisfa l'invariante di rappresentazione

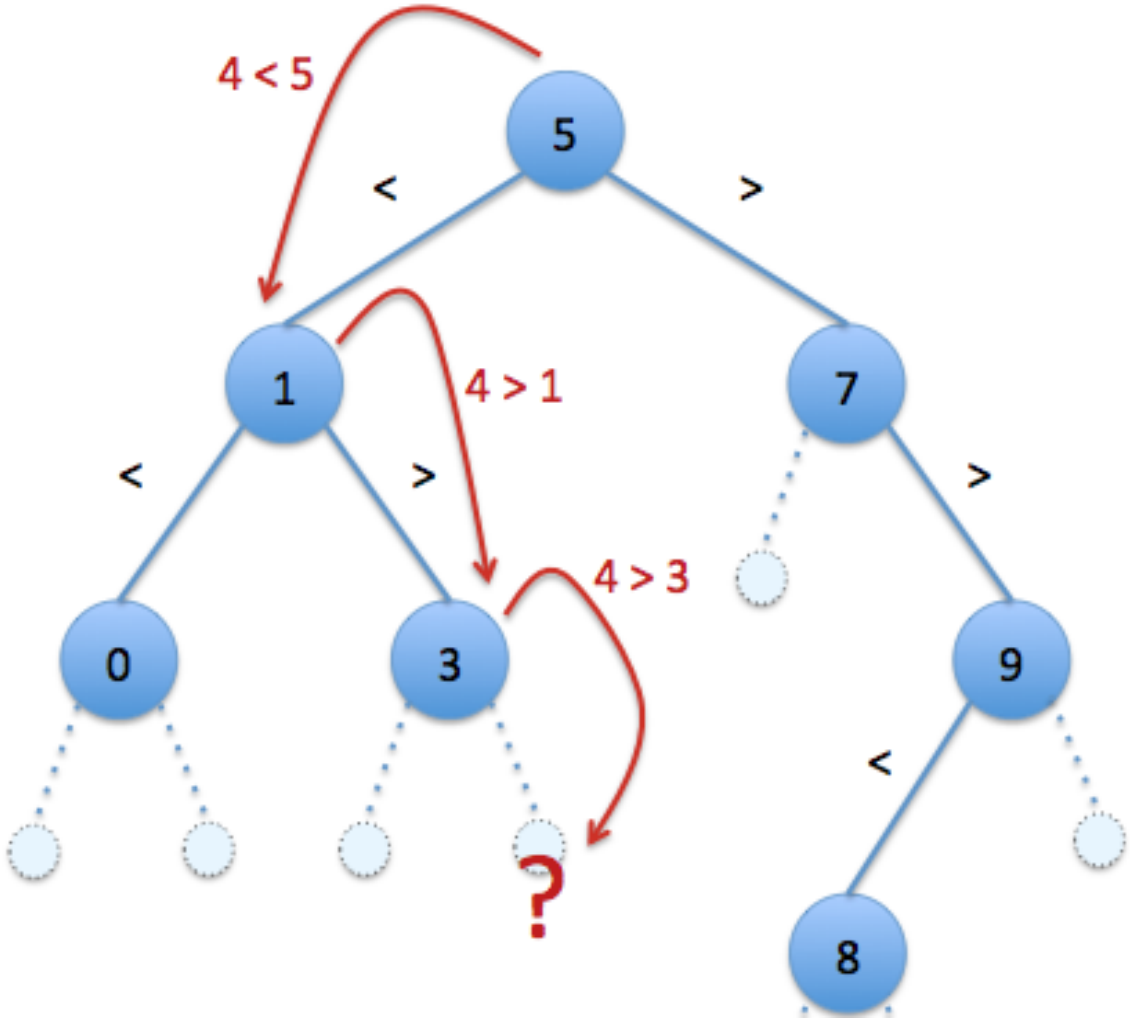
lookup(t, 3)



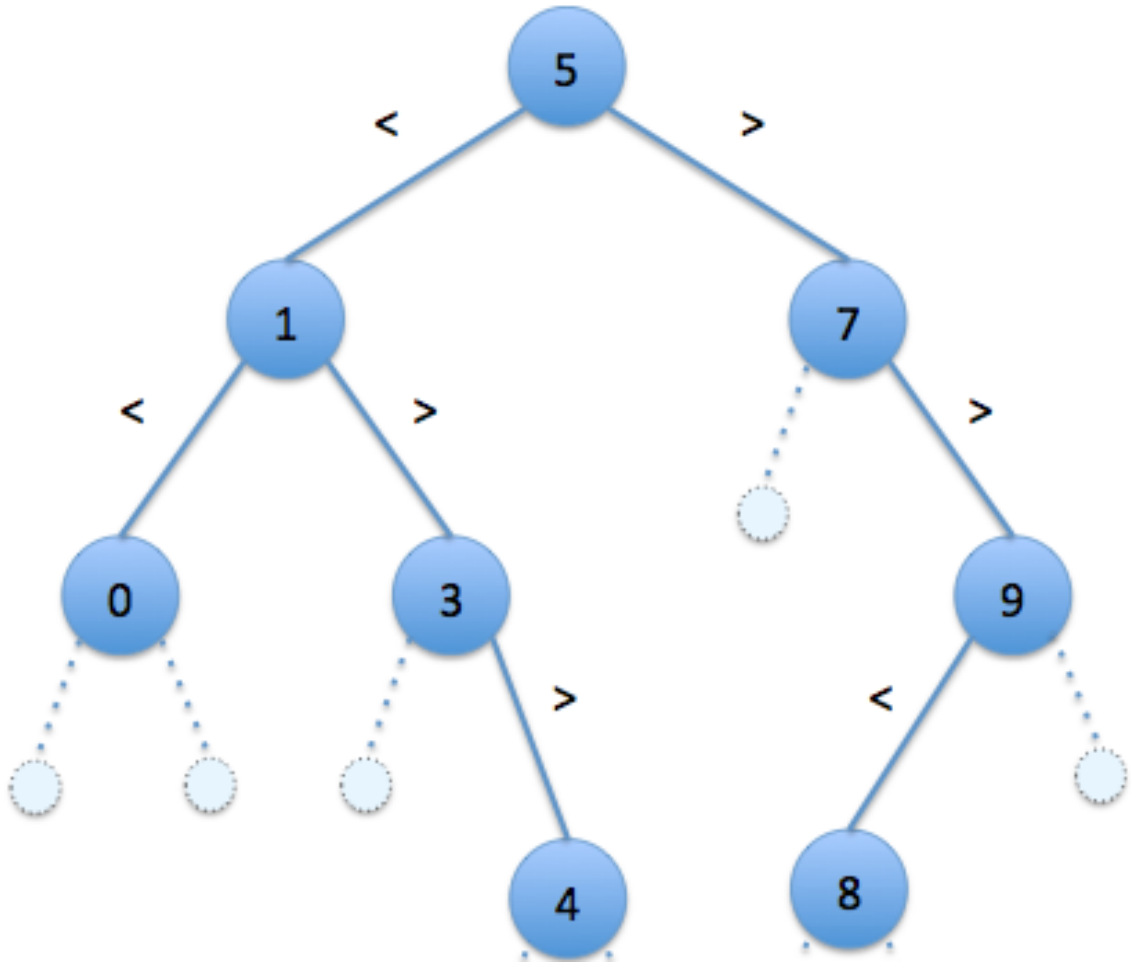
Come costruiamo un BST???

- Opzione 1
  - costruiamo un albero e poi controlliamo (check) se vale l'invariante di rappresentazione
- Opzione 2
  - definire le funzioni che costruiscono BST a partire da BST (ad esempio, la funzione che inserisce un elemento in un BST e restituisce un BST)
  - definire una funzione che costruisce il BST vuoto
  - tutte queste funzioni soddisfano l'invariante di rappresentazione, pertanto "per costruzione" otteniamo un BST
  - non si deve effettuare nessun controllo a posteriori!!

insert(t, 4)



insert(t, 4)

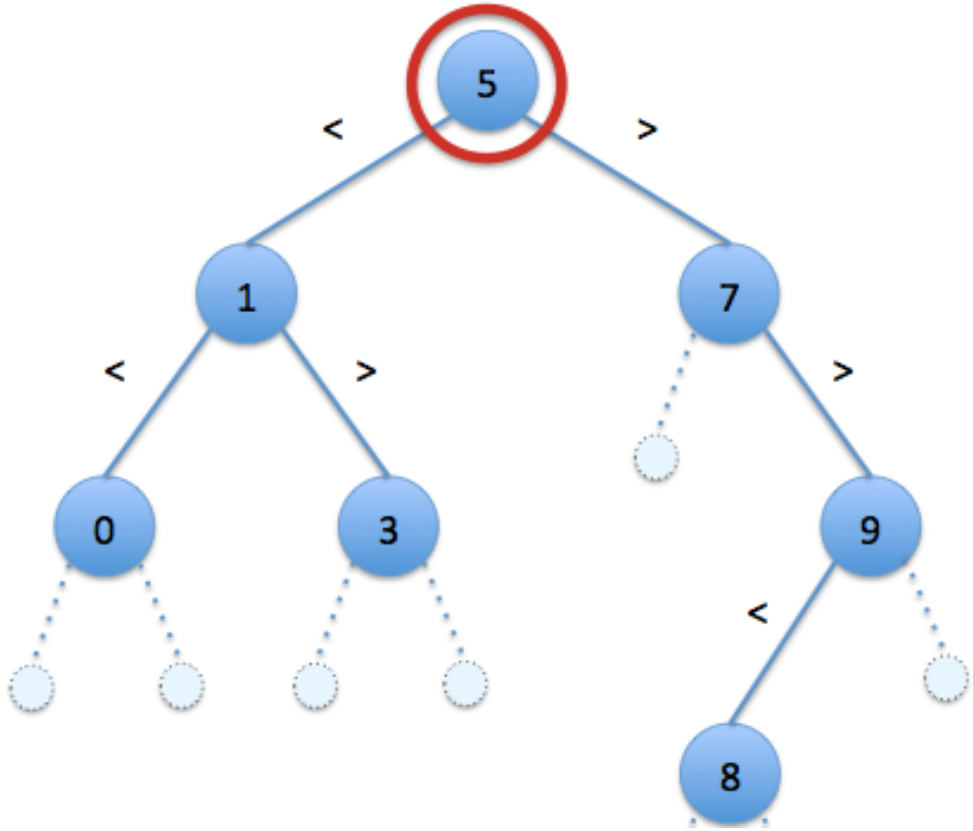


Inserimento

```
let rec insert (t : tree) (n : int):tree =
      match t with
            Empty  -> Node (Empty , n, Empty )
          | Node (lt, x, rt) ->
               if x = n then t else
if n < x then Node(insert lt n, x, rt)
else Node (lt, x, insert rt n)
```

Per quale motivo l'albero costruito dalla funzione insert è un BST?

delete(t,5)



L’operazione di rimozione è più complicata: si deve promuovere la foglia 3 a radice dell’albero!!!

Funzione ausiliaria

```
let rec tree_max (t : tree) : int =
    match t with
          Node(_, x, Empty) -> x
        | Node(_, _, rt) -> tree_max rt
      | _ -> failwith "tree_max called on
Empty”
```

L’invariante di rappresentazione garantisce che il valore max si trova nella parte più a destra dell’albero

delete


```
let rec delete (t : tree) (n : int):tree =
  match t with
          Empty -> Empty
    | Node(lt, x, rt) ->  if x = n then
                  begin match (lt, rt) with
                      (Empty, Empty) -> Empty
                    | (Node _, Empty) -> lt
                    | (Empty, Node _) -> rt
                    | _ -> let m = tree_max lt in
                   Node(delete lt m, m, rt)
                        end
              else if n < x then Node(delete lt n, x, rt
                       else Node(lt, x, delete rt n)
```