



# CALCOLO PROPOSIZIONALE

**Corso di Logica per la Programmazione**

*Andrea Corradini*

*andrea@di.unipi.it*

# UN PROBLEMA DI DEDUZIONE LOGICA

(da un test d'ingresso)

- Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema. Si sa che:
  - Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio;
  - Condizione necessaria perché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno.
- Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che:
  - 1) Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
  - 2) Nessuno dei tre amici è andato al cinema
  - 3) Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
  - 4) Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno
- *Come si formalizza? Come si può usare una dimostrazione per rispondere alla domanda?*



# IL CALCOLO PROPOSIZIONALE

- E' il nucleo di (quasi) tutte le logiche. Limitato potere espressivo, ma sufficiente per introdurre il concetto di dimostrazione.
- Le *proposizioni (enunciati dichiarativi)* sono asserzioni a cui sia assegnabile in modo univoco un valore di verità in accordo ad una interpretazione del mondo a cui si riferiscono.
- “dichiarativi sono non già tutti i discorsi, ma quelli in cui sussiste una enunciazione vera oppure falsa”

*Aristotele*



# ESEMPI DI PROPOSIZIONI “ATOMICHE”

1. Roma è la capitale d'Italia
2. La Francia è uno stato del continente asiatico
3.  $1+1 = 2$
4.  $2+2 = 3$



# ESEMPI DI NON PROPOSIZIONI

1. Che ora è?
2. Leggete queste note con attenzione
3.  $X+1 = 2$



# CONNETTIVI LOGICI

<i>Connettivo</i>	<i>Forma simbolica</i>	<i>Operazione corrispondente</i>
not	$\sim p$	negazione
and, e	$p \wedge q$	congiunzione
or, oppure	$p \vee q$	disgiunzione
se p allora q	$p \Rightarrow q$	implicazione
p se e solo se q	$p \equiv q$	equivalenza
p se q	$p \Leftarrow q$	conseguenza



# SINTASSI DELLE PROPOSIZIONI (GRAMMATICA)

Prop ::=

Prop  $\equiv$  Prop | Prop  $\wedge$  Prop | Prop  $\vee$  Prop |

Prop  $\Rightarrow$  Prop | Prop  $\Leftarrow$  Prop |

Atom |  $\sim$ Atom

Atom ::=

**T** | **F** | Ide | (Prop)

Ide ::=

p | q | ... | P | Q | ...



# SEMANTICA (SIGNIFICATO) DELLE PROPOSIZIONI

- Tabelle di verità dei connettivi logici:

<b>p</b>	<b>q</b>	<b><math>\sim p</math></b>	<b><math>p \wedge q</math></b>	<b><math>p \vee q</math></b>	<b><math>p \Rightarrow q</math></b>	<b><math>p \equiv q</math></b>	<b><math>p \Leftarrow q</math></b>
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F	F
F	F	T	F	F	T	T	T

- Si osservi in particolare il valore di verità di un'implicazione (o di una conseguenza)



# CALCOLO PROPOSIZIONALE PER FORMALIZZARE ENUNCIATI: ESEMPIO

- Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema.
  - *Introduciamo tre proposizioni:*
    - **A**  $\equiv$  “Antonio va al cinema”
    - **B**  $\equiv$  “Bruno va al cinema”
    - **C**  $\equiv$  “Corrado va al cinema”
- Si sa che:
  - Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio;
    - **C**  $\Rightarrow$  **A**
  - Condizione necessaria perché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno.
    - **A**  $\Rightarrow$  **B**



# CALCOLO PROPOSIZIONALE PER FORMALIZZARE ENUNCIATI: ESEMPIO

- Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che:
  - Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
    - $C \Rightarrow B$
  - Nessuno dei tre amici è andato al cinema
    - $\sim A \wedge \sim B \wedge \sim C$
  - Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
    - $B \Rightarrow C$
  - Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno
    - $\sim C \Rightarrow \sim B$
- Per rispondere alla domanda, dobbiamo capire quale di queste quattro proposizioni è *conseguenza logica* delle proposizioni precedenti



# FORMALIZZAZIONE DI ENUNCIATI: ESEMPI

- Piove e fa molto freddo
- Fa freddo, ma non piove
- Se ci sono nuvole e non c'è vento, allora piove
- Piove solo se ci sono nuvole e non c'è vento
- Nevica, ma non fa freddo se ci si copre
- Se ci si copre, allora fa freddo o nevica



# Formalizzazione di implicazioni in linguaggio naturale

Scrivere la proposizione rappresentata da ognuna delle seguenti frasi in italiano:

- Se  $P$ , allora  $Q$
- $P$  è una conseguenza di  $Q$
- $P$  è condizione necessaria e sufficiente per  $Q$
- $P$  è condizione necessaria per  $Q$
- $P$  è condizione sufficiente per  $Q$
- $P$  vale solo se vale  $Q$
- $P$  vale se vale  $Q$
- $P$  vale se e solo se vale  $Q$



# TAUTOLOGIE E CONTRADDIZIONI

- Una **tautologia** è una formula del calcolo proposizionale che vale **T** per qualunque valore **T/F** assegnato alle variabili proposizionali
  - Esempio:  $p \vee \sim p$  (vedi tabella di verità)
- Una **contraddizione** è una formula che vale **F** per qualunque valore **T/F** assegnato alle variabili proposizionali
- Quindi **P** è una tautologia se e solo se  $\sim P$  è una contraddizione



# IMPLICAZIONI E EQUIVALENZE TAUTOLOGICHE

- Diciamo che

*p* implica tautologicamente *q*

se e solo se

$p \Rightarrow q$  è una tautologia

*p* è tautologicamente equivalente a *q*

se e solo se

$p \equiv q$  è una tautologia

- Praticamente tutti i problemi nel Calcolo Proposizionale si riducono a dimostrare che una proposizione è una tautologia.
- Come si può dimostrare?



# DIMOSTRAZIONE DI TAUTOLOGIE

- Per dimostrare che  $p$  è una tautologia possiamo
  - Usare le tabelle di verità
    - Del tutto meccanico, richiede di considerare  $2^n$  casi, dove  $n$  è il numero di variabili proposizionali in  $p$
  - Cercare di costruire una dimostrazione
    - Usando delle leggi (tautologie già dimostrate)
    - Usando opportune *regole di inferenza*
    - Si possono impostare vari tipi di dimostrazione
  - Mostrare che non è una tautologia
    - individuando valori delle variabili proposizionali che rendono falsa  $p$

