Logica per la Programmazione

Lezione 9

- Leggi per i Quantificatori

Riassunto

- Abbiamo rivisitato le **Regole di Inferenza** del Calcolo Proposizionale in forma più generale (**come proof system con premesse**)
  - **Principio di Sostituzione** come regola di inferenza
  - Correttezza e completezza rispetto al concetto di conseguenza logica
- Estenderemo il proof system alla Logica del Primo Ordine
  - Per CP useremo sempre le leggi che abbiamo presentato
  - Introdurremo **nuove leggi** e **nuove regole di inferenza** per i quantificatori
  - Le regole di inferenza che introdurremo formano un proof system **corretto** per LPO ma non **completo**: questo sarebbe impossibile

Leggi per i Quantificatori

- Per il Calcolo Proposizionale, le leggi che abbiamo visto sono **tautologie**: lo abbiamo dimostrato usando tavole di verità o dimostrazioni di vario formato
- Per LPO le **leggi** sono **formule valide**:
  - $\phi \equiv \psi$
  - $\phi \Rightarrow \psi$

  Per convincerci della validità di una legge possiamo usare la definizione di validità, oppure una dimostrazione che usi solo premesse valide

- Ricordiamo che in una formula con quantificatore come $(\forall x.P)$ (risp.$(\exists x.P)$) la portata di $\forall x$ (risp. $\exists x$) è la sottoformula P.

Leggi per i Quantificatori: (1)

- (elim-$\forall$)

$$(\forall x.P) \Rightarrow P[t/x]$$

dove t è un **termine chiuso** e $P[t/x]$ è ottenuto da P sostituendo tutte le occorrenze libere di x in P con t

- Esempi:
  -
  $$\begin{array}{ll} & (\forall x.pari(x) \wedge x > 2 \Rightarrow \neg primo(x)) \\ \Rightarrow & \{(\mathrm{elim} - \forall)\} \\ & pari(7) \wedge 7 > 2 \Rightarrow \neg primo(7) \end{array}$$
  -
  $$\begin{array}{ll} & (\forall x.uomo(x) \Rightarrow mortale(x)) \\ \Rightarrow & \{(\mathrm{elim} - \forall)\} \\ & uomo(Socrate) \Rightarrow mortale(Socrate) \end{array}$$

Validità della Legge (elim-$\forall$)

- $\phi = (\forall x.P) \Rightarrow P[t/x]$
- Poiché non abbiamo visto altre leggi, usiamo la definizione di validità: (elim-$\forall$) deve essere vera in qualunque interpretazione
- **Per assurdo**: sia $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ tale che $\mathcal{I}_\rho(\phi) = \mathbf{F}$ per ρ qualunque
- Per (S6), $\mathcal{I}_\rho(\phi) = \mathbf{F}$ sse $\mathcal{I}_\rho((\forall x.P)) = \mathbf{T}$ e $\mathcal{I}_\rho(P[t/x]) = \mathbf{F}$
- Se $\mathcal{I}_\rho((\forall x.P)) = \mathbf{T}$, per (S8) abbiamo: $\mathcal{I}_{\rho[d/x]}(P) = \mathbf{T}$ per qualunque d in $\mathcal{D}$.
- ... e quindi in particolare $\mathcal{I}_{\rho[\underline{d}/x]}(P) = \mathbf{T}$ con $\underline{\mathbf{d}} = \alpha_\rho(\mathbf{t})$
- Ma allora $\mathcal{I}_\rho(P[t/x]) = \mathbf{T}$, e abbiamo ottenuto una **contraddizione**
- Nota che: Abbiamo usato $\mathcal{I}_\rho(P[t/x]) = \mathcal{I}_{\rho[\underline{d}/x]}(P)$, che si può dimostrare per induzione strutturale su t

Leggi per i Quantificatori (2)

- (intro-$\exists$)

$$P[t/x] \Rightarrow (\exists x.P)$$

dove t è un **termine chiuso** e $P[t/x]$ è ottenuto da P sostituendo tutte le occorrenze libere di x in P con t

- Esempio:

$$\begin{array}{ll} & pari(10) \wedge 10 > 2 \\ \Rightarrow & \{(\text{intro} - \exists)\} \\ & (\exists x.pari(x) \wedge x > 2) \end{array}$$

- **Esercizio**: Dimostrare la validità di (intro-$\exists$) utilizzando la definizione di validità di una formula, come visto per (elim-$\forall$).

Leggi per i Quantificatori (3)

- $$\neg(\forall x.P) \equiv (\exists x.\neg P) \quad \text{(De Morgan)}$$
  $$\neg(\exists x.P) \equiv (\forall x.\neg P)$$
- $$(\forall x.(\forall y.P)) \equiv (\forall y.(\forall x.P)) \quad \text{(Annidamento)}$$
  $$(\exists x.(\exists y.P)) \equiv (\exists y.(\exists x.P))$$
- **Esercizio**: Dimostrare la validità delle leggi presentate. Facile usando le regole (S8) e (S9) della semantica
- **Esercizio**: Dimostrare che la seguente formula non è valida:

$$(\forall x.(\exists y.P)) \equiv (\exists y.(\forall x.P))$$

Leggi per i Quantificatori (4)

- $$(\forall x.P \wedge Q) \equiv (\forall x.P) \wedge (\forall x.Q) \quad (\forall : \wedge)$$
  $$(\exists x.P \vee Q) \equiv (\exists x.P) \vee (\exists x.Q) \quad (\exists : \vee)$$
- $$(\forall x.P) \vee (\forall x.Q) \Rightarrow (\forall x.P \vee Q) \quad (\forall : \vee)$$
  $$(\exists x.P \wedge Q) \Rightarrow (\exists x.P) \wedge (\exists x.Q) \quad (\exists : \wedge)$$
- **Esercizio**: Dimostrare la validità delle leggi presentate.
- **Esercizio**: Dimostrare che le seguenti formule non sono valide:
  - $(\forall x.P \vee Q) \ \Rightarrow \ (\forall x.P) \vee (\forall x.Q)$
  - $(\exists x.P) \wedge (\exists x.Q) \ \Rightarrow \ (\exists x.P \wedge Q)$

Leggi per i Quantificatori (5)

- Le seguenti leggi (**costante**) valgono solo se si assume che il **dominio di interpretazione non sia vuoto**:

$$(\forall x.P) \equiv P \quad \text{se } x \text{ non occorre in } P$$

$$(\exists x.P) \equiv P \quad \text{se } x \text{ non occorre in } P$$

- Leggi (Distrib.) assumendo che x non occorra in Q

$$(\forall x.P \vee Q) \equiv (\forall x.P) \vee Q$$
$$(\exists x.P \wedge Q) \equiv (\exists x.P) \wedge Q$$

- Leggi (Distrib.) assumendo che x non occorra in Q e che il **dominio di interpretazione non sia vuoto**:

$$(\forall x.P \wedge Q) \equiv (\forall x.P) \wedge Q$$
$$(\exists x.P \vee Q) \equiv (\exists x.P) \vee Q$$

- **Esercizio**: Dimostrare la validità delle leggi presentate.

Altre Leggi per i Quantificatori (derivate)

- Dimostrare la validità delle seguenti formule mostrando come siano dimostrabili a partire dalle leggi viste precedentemente:

$$
\begin{array}{ll}
(\forall x.P \vee Q \Rightarrow R) \equiv (\forall x.P \Rightarrow R) \wedge (\forall x.Q \Rightarrow R) & (Dominio) \\
(\exists x.(P \vee Q) \wedge R) \equiv (\exists x.P \wedge R) \vee (\exists x.Q \wedge R) & (Dominio)
\end{array}
$$

- Altre leggi derivabili:

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
(\forall x.P) \Rightarrow (\forall x.P \vee Q) & (\forall x.P \wedge Q) \Rightarrow (\forall x.P) \\
 & \\
(\exists x.P) \Rightarrow (\exists x.P \vee Q) & (\exists x.P \wedge Q) \Rightarrow (\exists x.P)
\end{array}
}
$$

Linguaggio del Primo Ordine con Uguaglianza

- Considereremo sempre linguaggi del primo ordine con uguaglianza, cioè con il simbolo speciale di predicato binario "$=$" (quindi $= \in \mathcal{P}$)
- Il significato di "$=$" è fissato: per qualunque interpretazione, la formula $\mathbf{t} = \mathbf{t}'$ è vera se e solo se $\mathbf{t}$ e $\mathbf{t}'$ denotano lo stesso elemento del dominio di interesse
- Più formalmente: data una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ ed un assegnamento $\rho : \mathcal{V} \to \mathcal{D}$, abbiamo $\mathcal{I}_\rho(\mathbf{t} = \mathbf{t}') = \mathbf{T}$ se $\alpha_\rho(\mathbf{t}) = \alpha_\rho(\mathbf{t}')$ (cioè se le semantiche di $\mathbf{t}$ e $\mathbf{t}'$ coincidono), $\mathbf{F}$ altrimenti

Leggi per l'Uguaglianza

- Per il predicato di uguaglianza valgono le seguenti leggi:

$$
\begin{array}{ll}
(\forall x.(\forall y.x = y \Rightarrow (P \equiv P[y/x]))) & \textit{(Leibniz)} \\
(\forall x.(\forall y.(x = y \wedge P) \equiv x = y \wedge P[y/x]))) & \\
(\forall x.(\forall y.(x = y \wedge P) \Rightarrow P[y/x]))) & \\
 & \\
(\forall y.(\forall x.x = y \Rightarrow P) \equiv P[y/x]) & \textit{(singoletto)} \\
(\forall y.(\exists x.x = y \wedge P) \equiv P[y/x]) &
\end{array}
$$

Leggi per l'Uguaglianza (2)

- Attenzione: spesso (e nella dispensa) queste leggi sono scritte informalmente *senza* quantificazioni:

$$x = y \Rightarrow (P \equiv P[y/x]) \qquad (\textit{Leibniz})$$

$$(x = y \land P) \equiv x = y \land P[y/x])$$

$$(x = y \land P) \Rightarrow P[y/x]$$

Regole di Inferenza: La Regola di Generalizzazione

- Per dimostrare una formula del tipo $(\forall x.P)$ possiamo procedere sostituendo x con un nuovo simbolo di costante d e dimostrare $P[d/x]$
- Intuitivamente, d rappresenta un **generico elemento del dominio** sul quale non possiamo fare alcuna ipotesi

$$\frac{\Gamma \vdash P[d/x],\ \text{con } d \text{ nuova costante}}{\Gamma \vdash (\forall x.P)}$$

Regole di Inferenza: La Regola di Skolemizzazione

- Se sappiamo che $(\exists x.P)$ è vera, possiamo usarla per dimostrare una qualsiasi formula Q usando come ipotesi $P[d/x]$, dove d è una costante nuova, che non compare in Q:

$$\frac{\begin{array}{c}(\exists x.P) \in \Gamma \\ \Gamma, P[d/x] \vdash Q, \text{ con } d \text{ nuova costante che non occorre in } Q\end{array}}{\Gamma \vdash Q}$$

- Intuitivamente, è come se chiamassimo d un **ipotetico elemento del dominio** che testimonia la verità di $(\exists x.P)$.