Logica per la Programmazione

Lezione 7

- Semantica della Logica del Primo Ordine

Esempio di Semantica: Alfabeto e Interpretazioni

- Consideriamo l'alfabeto

$$\boxed{\mathcal{C} = \{a, b, c\} \quad \mathcal{F} = \{\} \quad \mathcal{P} = \{p\} \quad \mathcal{V} = \{x, y\}}$$

- **Interpretazione I_1**
  - **Dominio**: le città italiane
  - Le costanti a, b e c rappresentano le città italiane **Milano**, **Roma**, **Pontedera**, rispettivamente
  - $p(x) = \mathbf{T}$ se x è capoluogo di provincia, **F** altrimenti
- **Interpretazione I_2**
  - **Dominio**: l'insieme di numeri naturali $\{\mathbf{5}, \mathbf{10}, \mathbf{15}\}$
  - Le costanti a, b e c corrispondono ai valori $\mathbf{5}, \mathbf{10}$ e $\mathbf{15}$, rispettivamente
  - $p(x) = \mathbf{T}$ se x è multiplo di **5**, **F** altrimenti
- **Interpretazione I_3**
  - come I_2, ma **Dominio**: l'insieme dei numeri naturali

Esempio di Semantica: Valore di Verità di Formule

	Dominio	a	b	c	$p(x)$
I_1	città italiane	Milano	Roma	Pontedera	x capoluogo
I_2	$\{5, 10, 15\}$	5	10	15	x multiplo di 5
I_3	numeri naturali	5	10	15	x multiplo di 5

Formula	**Valore in I_1**	**Valore in I_2**	**Valore in I_3**
$p(a)$	**T**	**T**	**T**
$p(b)$	**T**	**T**	**T**
$p(c)$	**F**	**T**	**T**
$p(a) \wedge p(c)$	**F**	**T**	**T**
$(\exists x.p(x))$	**T**	**T**	**T**
$(\forall x.p(x))$	**F**	**T**	**F**
$(\exists x.p(x)) \wedge (\exists y.\neg p(y))$	**T**	**F**	**T**

Sommario

- Finora abbiamo associato un valore di verità alle formule in modo informale: vedremo ora la definizione formale della semantica
- Siamo interessati a fornire la semantica delle formule chiuse rispetto ad una **interpretazione**

Interpretazione: Richiamo

Una **intepretazione** (rispetto ad un alfabeto $\mathcal{A} = (\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ è definita come $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ dove:

- $\mathcal{D}$ è un insieme (detto dominio dell' interpretazione)
- Una funzione di interpretazione α che associa:
  - ad ogni **costante** $c \in \mathcal{C}$ un **elemento** del dominio $\mathcal{D}$, denotata da $\alpha(c)$
  - ad ogni **simbolo di funzione** $f \in \mathcal{F}$ di arietà n una funzione (denotata da $\alpha(f)$) che data una n-upla di elementi di $\mathcal{D}$ restituisce un elemento di $\mathcal{D}$
  - ad ogni **simbolo di predicato** $p \in \mathcal{P}$ di arietà zero (un simbolo proposizionale) un **valore di verità** (indicato da $\alpha(p)$)
  - ad ogni **simbolo di predicato** $p \in \mathcal{P}$ di arietà n (un **predicato** ***n*-ario**), una funzione (indicato da $\alpha(p)$) che data una n-upla di elementi di $\mathcal{D}$ restituisce un valore di verità

La Semantica della Logica del Primo Ordine

- Fissiamo un linguaggio del primo ordine, ovvero un alfabeto $\mathcal{A} = (\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$
- Data una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ e una **formula chiusa** ϕ, vogliamo definire in modo formale la **semantica** di ϕ in $\mathcal{I}$, cioè il suo valore di verità
- Tale valore di verità si calcola **procedendo in maniera induttiva** sulla formula ϕ
- Per far questo, dobbiamo prima dare la **semantica** dei **termini** che compaiono in ϕ
  - I termini **chiusi** (che non contengono variabili) denotano elementi del dominio di interpretazione $\mathcal{D}$
  - La **semantica** dei **termini** (che denota un elemento del dominio) si calcola analogamente **procedendo in maniera induttiva**

La Semantica: Commenti

- È **conveniente** dare la semantica per formule generali
- Consideremo **formule aperte** che possono contenere variabili libere
- Analogamente consideremo **termini aperti** che possono contenere variabili
- La semantica di termini e formule aperte dipende da un assegnamento che associa un **elemento del dominio** ad ogni variabile

Assegnamenti

- Per dare la semantica ad una formula (o termine) aperta rispetto ad una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ introduciamo un **assegnamento**
- Un **assegnamento** è una funzione che associa ad ogni variabile in $\mathcal{V}$ un elemento del dominio: $\rho : \mathcal{V} \to \mathcal{D}$
- Con $\rho[d/x]$ intendiamo l'assegnamento ρ modificato in modo tale che associ alla variabile $x \in \mathcal{V}$ il valore del dominio $d \in \mathcal{D}$, ovvero

$$\rho[d/x] = \begin{cases} d & \text{se } x = y \\ \rho(y) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Esempio: Dati $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ e $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$ assumiamo ρ dove $\rho(x) = 0$, $\rho(y) = 3$, $\rho(z) = 1$. Allora $\rho[15/z] = \rho_1$ corrisponde a:

$$\rho_1(x) = 0, \rho_1(y) = 3, \rho_1(z) = 15$$

Semantica dei Termini Aperti

- Ricordiamo la definizione (induttiva) **sintattica di termine**:
  - Ogni costante $c \in \mathcal{C}$ è un termine e ogni variabile $x \in \mathcal{V}$ è un termine
  - Se $f \in \mathcal{F}$ è un simbolo di funzione con arietà n e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini, allora $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un termine
- Data una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ ed un assegnamento $\rho : \mathcal{V} \to \mathcal{D}$, la **semantica** di un termine t, in simboli $\alpha_\rho(t)$, è un elemento del dominio
- $\alpha_\rho(t)$ è ottenuta **per induzione strutturale** con le tre regole:
  - (R0) se t è la variabile x allora $\alpha_\rho(t) = \rho(x)$
  - (R1) se t è una costante c allora $\alpha_\rho(t) = \alpha(c)$
  - (R3) se t è il termine $f(t_1, \ldots, t_n)$ e $\alpha_\rho(t_1) = d_1$, ... , $\alpha_\rho(t_n) = d_n$, allora
    $$\alpha_\rho(t) = \alpha(f)(d_1, \ldots, d_n)$$

Un Esempio di Interpretazione

- Alfabeto
  - $\mathcal{C} = \{\mathbf{a}\}$
  - $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}\}$ con arietà 1
  - $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}\}$ con arietà 2
  - $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$
- Interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$
  - $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, insieme dei numeri naturali
  - $\alpha(\mathbf{a}) = 0$
  - $\alpha(\mathbf{f})$ è la funzione successore $\alpha(\mathbf{f})(n) = n + 1$
  - $\alpha(\mathbf{p})$ è la relazione di maggiore sui naturali

Esempio: Semantica di un Termine Chiuso

- Determiniamo la semantica del termine chiuso $\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(a)))$ rispetto all'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ ed all'assegnamento ρ dove

$$\rho(x) = 2, \rho(y) = 3, \rho(z) = 1$$

- Calcoliamo $\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(a))))$:

$$\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(a)))) = \alpha(\mathbf{f})(\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(a)))) = \alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(a))) + 1 =$$
$$\alpha(\mathbf{f})(\alpha_\rho(\mathbf{f}(a))) + 1 = \alpha_\rho(\mathbf{f}(a)) + 1 + 1 = \alpha(\mathbf{f})(\alpha_\rho(a)) + 2 =$$
$$\alpha_\rho(a) + 1 + 2 = \alpha(a) + 1 + 2 = 0 + 3 = 3$$

- La semantica di un termine è un elemento del dominio !!!
- Dato che il termine è chiuso la semantica non dipende da ρ

Esempio: Semantica di un Termine Aperto

- Consideriamo di nuovo l'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ e ll'assegnamento ρ dove

$$\rho(x) = 2, \rho(y) = 3, \rho(z) = 1$$

- Determiniamo la semantica del termine aperto $\mathbf{f}(\mathbf{f}(x))$:

$$\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(x))) = \ldots = \alpha_\rho(x) + 1 + 1 = \rho(x) + 1 + 1 = 4.$$

- Dato che il termine è aperto la semantica in questo caso dipende dall'assegnamento ρ!!!!!

Semantica delle Formule

- Data una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ ed un assegnamento $\rho : \mathcal{V} \to \mathcal{D}$, la semantica di un formula (aperta) ϕ viene indicata con $\mathcal{I}_\rho(\phi)$
- La semantica di un formula ϕ (in simboli $\mathcal{I}_\rho(\phi)$) si definisce per **induzione strutturale** sulla formula ϕ
- la semantica $\mathcal{I}_\rho(\phi)$ di un formula ϕ si determina in base alle seguenti regole

Semantica delle Formule (1): Formule Atomiche

- **Caso base: formule atomiche**. Ricordiamo la definizione sintattica dato un simbolo di predicato $p \in \mathcal{P}$
  - se p ha arietà 0 allora p è una formula (corrisponde a una variabile proposizionale nel CP)
  - se p ha arietà $n > 0$ e $t_1, ..., t_n$ sono termini allora $p(t_1, ..., t_n)$ è una formula.
- Data una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ ed un assegnamento $\rho : \mathcal{V} \to \mathcal{D}$ definiamo la regola (S1) come segue:
  - se $\phi = p$ dove il predicato p ha arietà 0 allora

$$\mathcal{I}_\rho(\phi) = \alpha(p)$$

  - se $\phi = p(t_1, ..., t_n)$ e $\alpha_\rho(t_1) = d_1$, ... , $\alpha_\rho(t_n) = d_n$, allora

$$\mathcal{I}_\rho(\phi) = \alpha(p)(d_1, ..., d_n)$$

Semantica delle Formule (2): Connettivi Logici

- (S2) se $\phi = (P)$ allora $\mathcal{I}_\rho(\phi) = \mathcal{I}_\rho(P)$
- (S3) se $\phi = \neg P$ allora

$$\mathcal{I}_\rho(\phi) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(P) = \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(P) = \mathbf{T} \end{cases}$$

- (S4) se $\phi = P \wedge Q$ allora

$$\mathcal{I}_\rho(\phi) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(P) = \mathbf{T} \text{ e } \mathcal{I}_\rho(Q) = \mathbf{T} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (S5) se $\phi = P \vee Q$ allora

$$I_\rho(\phi) = \begin{cases} \mathbf{F} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(P) = \mathbf{F} \text{ e } \mathcal{I}_\rho(Q) = \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (S6) se $\phi = P \ \Rightarrow \ Q$ allora

$$\mathcal{I}_\rho(\phi) = \begin{cases} \mathbf{F} & \text{se } \mathcal{I}\rho(P) = \mathbf{T} \text{ e } \mathcal{I}_\rho(Q) = \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (S7) se $\phi = P \equiv Q$ allora

$$I_\rho(\phi) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(P) = \mathcal{I}_\rho(Q) \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Semantica delle Formule (3): Quantificatori

- (S8) se $\phi = (\forall x.P)$ allora

$$\mathcal{I}_\rho(\phi) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_{\rho[\mathbf{d}/x]}(P) = \mathbf{T} \quad \text{per qualunque } \mathbf{d} \in \mathcal{D} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (S9) se $\phi = (\exists x.P)$ allora

$$\mathcal{I}_\rho(\phi) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_{\rho[\mathbf{d}/x]}(P) = \mathbf{T} \quad \text{per almeno } \mathbf{d} \in \mathcal{D} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- **Nota**: l'uso dell' **assegnamento** ρ è necessario per le regole dei quantificatori (S8) ed (S9) infatti la sottormula P è tipicamente una formula aperta

Semantica: Esercizio 1

Mostrare che la formula

$$\phi_1 = (\exists x.Q(x) \wedge (\forall y.P(x,y)))$$

è vera nell'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D} = \{a, b\}$ ed α è definita come segue:

$$\alpha(P)(x,y) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } x = a \text{ e } y = a \text{ oppure } x = a \text{ e } y = b \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\alpha(Q)(x) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } x = a \text{ oppure } x = b \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Procedimento: Calcolare il valore di $\mathcal{I}_{\rho_0}(\phi_1)$ usando le regole (S1)-(S9) per induzione strutturale, dove ρ_0 è un assegnamento arbitrario.

Semantica: Esercizio 2

Calcolare il valore di verità della formula

$$\phi_2 = (\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x)))$$

rispetto all'interpretazione$\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D} = \{a, b, c\}$ ed α è definita come segue:

$$\alpha(P)(z) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } z = a \text{ oppure } z = b \\ \mathbf{F} & \text{se } z = c \end{cases}$$

$$\alpha(Q)(z) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } z = a \text{ oppure } z = c \\ \mathbf{F} & \text{se } z = b \end{cases}$$

$$\alpha(R)(z) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } z = b \\ \mathbf{F} & \text{se } z = a \text{ oppure } z = c \end{cases}$$

Procedimento: Calcolare il valore di $\mathcal{I}_{\rho_0}(\phi_2)$ usando le regole (S1)-(S9) per induzione strutturale, dove ρ_0 è un assegnamento arbitrario.