Logica per la Programmazione

Lezione 9

- Formule Valide, Conseguenza Logica
- Proof System con Premesse
- Introduzione al Proof System per la Logica del Primo Ordine

Logica del Primo Ordine: riassunto

- Sintassi: grammatica libera da contesto (o definizione induttiva), parametrica rispetto ad un alfabeto $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{V}, \mathcal{P})$
- Interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$: fissa il significato dei simboli appartenenti all' alfabeto
- Semantica: $\mathcal{I}_\rho(\phi)$ determina il valore di verità di una formula ϕ rispetto all' interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ e ad un assegnamento ρ, procedendo per *induzione strutturale*
- Se la formula ϕ è una formula chiusa possiamo dire che ϕ è vera in $\mathcal{I}$ se $\mathcal{I}_\rho(\phi) = \mathbf{T}$ per un assegnamento ρ arbitrario!!!

Modelli

- Sia $\mathcal{I}$ un'interpretazione e ϕ una formula chiusa. Se ϕ è vera in $\mathcal{I}$ diciamo che $\mathcal{I}$ è un modello di ϕ e scriviamo:

$$\mathcal{I} \models \phi$$

- Analogamente se Γ è un insieme di formule, con

$$\mathcal{I} \models \Gamma$$

  intendiamo che $\mathcal{I}$ è un modello di tutte le formule in Γ
- Se una formula ϕ è vera in tutte le interpretazioni si dice che è valida (estensione del concetto di tautologia) e scriviamo

$$\models \phi$$

- Se una formula ϕ è vera in almeno una interpretazione si dice che è soddisfacibile altrimenti è insoddisfacibile

Esempi

- Formula valida (corrispondono alle *tautologie*):
  $\boxed{(\forall x.p(x) \ \vee \neg p(x))}$
- Formula insoddisfacibile (corrispondono alle *contraddizioni*):
  $\boxed{p(a) \ \wedge \neg p(a)}$
- Formula **soddisfacibile**: $\boxed{(\exists x.p(x))}$
  - Basta trovare un'interpretazione che la renda vera. Per esempio: $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, con $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ e
    - $\alpha(p)(\mathbf{x}) =$ **T** se **x** è pari, **F** altrimenti
  - è valida?

Conseguenza Logica

- Il concetto di conseguenza logica consente di parametrizzare la verità di una formula ϕ rispetto a un insieme di formule Γ (dette le premesse)
- Diciamo che ϕ è una conseguenza logica di Γ e scriviamo

$$\Gamma \models \phi$$

  se e soltanto se ϕ è vera in tutti i modelli di Γ, ovvero se $\mathcal{I} \models \Gamma$ allora $\mathcal{I} \models \phi$
- Quindi *tutte le interpretazioni* $\mathcal{I}$ che rendono vere tutte le formule in Γ *rendono vera* anche ϕ
- In altre parole non è possibile che ϕ sia falsa in una interpretazione che rende vera Γ
- Caso Particolare: se $\Gamma = \emptyset$ o Γ contiene solo formule valide allora stiamo asserendo che ϕ è valida (quindi $\models \phi$ sta per $\emptyset \models \phi$)

Proprietà della Conseguenza Logica

- Supponiamo di avere $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ allora *tutte le interpretazioni* $\mathcal{I}$ che rendono vere tutte le formule in Γ_2 *rendono vere* anche le formule Γ_1
- Di conseguenza

$$\text{se } \Gamma_1 \models \phi \text{ allora } \Gamma_2 \models \phi$$

- Inoltre se partizioniamo le premesse $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ in modo che Γ_1 siano le formule valide mentre Γ_2 non lo sono. Abbiamo che

$$\Gamma_2 \models \phi \text{ se e solo se } \Gamma \models \phi$$

infatti *tutte le interpretazioni* $\mathcal{I}$ che rendono vere tutte le formule in Γ *rendono vere* anche le formule Γ_1 (sono sempre vere!!!!)

I Sistemi di Dimostrazione (Proof Systems)

- Come si dimostra che $\Gamma \models \phi$ (o anche che $\models \phi$)?
- Sono stati sviluppati vari proof system (sistema di dimostrazione) in ogni caso scriviamo

$$\Gamma \vdash \phi$$

  se esiste una dimostrazione di ϕ a partire dall'insieme di formule Γ (quindi Γ sono le premesse usate per dimostrare ϕ)
- Un proof system è un insieme di Regole di Inferenza che consentono di derivare una formula (*conseguenza*) da un insieme di formule dette le (*premesse*)
- Una Regola di Inferenza ha la forma

$$\frac{P_1 \ldots P_n}{C}$$

Una Dimostrazione con Premesse

- Scriviamo

$$\Gamma \vdash \phi$$

  se esiste una dimostrazione di ϕ a partire dall'insieme delle premesse Γ
- Come è strutturata una dimostrazione ?
- Una dimostrazione di ϕ a partire a partire da un insieme di premesse Γ è una sequenza di formule $\phi_1, \ldots, \phi_n$ tale che
  - Ogni formula ϕ_i è un elemento di Γ oppure è ottenuta applicando una Regole di Inferenza a partire dalle formule precedenti $\phi_1, \ldots, \phi_{i-1}$
  - ϕ_n coincide con ϕ

Correttezza e Completezza dei Proof Systems

- Un proof system è **corretto** se quando esiste una dimostrazione di una formula ϕ da un insieme di premesse Γ allora ϕ è una conseguenza logica di Γ, cioè

$$\text{se } \Gamma \vdash \phi \text{ allora } \Gamma \models \phi$$

- Un proof system è **completo** se quando una formula ϕ è una conseguenza logica di un insieme di premesse Γ, allora esiste una dimostrazione di ϕda Γ, cioè

$$\text{se } \Gamma \models \phi \text{ allora } \Gamma \vdash \phi$$

- Non ha senso considerare proof system non corretti!!

Calcolo Proposizionale come Proof System

- Il sistema di dimostrazione per sostituzione presentato per CP è un proof system con premesse, corretto ed anche completo
- Le Regole di Inferenza sono
  - il Prrincipio di Sostituzione per le dimostrazioni di equivalenza
  - i Principi di Sostituzione per $\Rightarrow$ le dimostrazioni
- Per formalizzarlo come proof system con premesse basta riformulare queste Regole di Inferenza in una forma più generale
  - Per i connettivi logici useremo le leggi del CP
- Non cambia niente nel modo in cui andremo a sviluppare una dimostrazione
- La formulazione del proof system con premesse nel caso del CP consente di definire la correttezza rispetto al concetto di conseguenza logica

Cosa vedremo del Calcolo del Primo Ordine

- Estenderemo il proof system alla Logica del Primo Ordine
  - Introdurremo nuove leggi (formule valide) ed anche nuove Regole di Inferenza (oltre al Principio di Sostituzione) per i quantificatori
  - Le regole di inferenza che introdurremo formano un proof system corretto per LPO ma non completo: questo sarebbe impossibile
  - **Teorema di Incompletezza** di Gödel (1931): nella logica del primo ordine sui naturali, esistono formule vere che non sono dimostrabili
- Intuitivamente in una dimostrazione di una formula ϕ a partire da un insieme di premesse Γ (indicato da $\Gamma \vdash \phi$) l'insieme Γ contiene tutte le leggi (formule valide) e tutte le ipotesi non valide usate nella prova

Leggi Generali e Ipotesi (1)

- Anche in LPO useremo come leggi generali formule valide (corrispondenti alle tautologie nel calcolo proposizionale)
- L'uso di formule valide garantisce la correttezza del risultato. Perché:
  - Sia Γ un insieme di formule valide e ϕ una formula dimostrabile a partire da Γ:
    $$\Gamma \vdash \phi$$
  - se $\Gamma \vdash \phi$ allora per la correttezza di $\vdash$, $\Gamma \models \phi$, ovvero ϕ è vera in ogni modello $\mathcal{I}$ di Γ
  - poiché ogni interpretazione $\mathcal{I}$ è modello di Γ significa che ϕ è vera in ogni interpretazione $\mathcal{I}$
  - quindi è valida (ovvero $\models \phi$)

Leggi Generali e Ipotesi (2)

- Se nelle premesse Γ oltre alle formule valide abbiamo anche altre formule (ipotesi) allora la dimostrazione

$$\Gamma \vdash \phi$$

  non garantisce la validità di ϕ, ma il fatto che ϕ, sia una **conseguenza logica** delle premesse in Γ

- quindi se $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove Γ_1 sono formule valide e Γ_2 sono ipotesi allora la dimostrazione garantisce che

$$\Gamma_2 \models \phi$$

- Ogni interpretazione $\mathcal{I}$ è modello di tutte le formule di $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sse è modello di tutte le formule di Γ_2

Generalizzazione del Principio di Sostituzione per $\equiv$

$$\frac{(P \equiv Q) \in \Gamma}{\Gamma \vdash R \equiv R[Q/P]}$$

- La generalizzazione consiste nel far riferimento ad un insieme di premesse Γ
- "Se P e Q sono logicamente equivalenti nelle premesse Γ, allora il fatto che R e $R[Q/P]$ sono equivalenti è conseguenza logica di Γ"

Generalizzazione dei Principi di Sostituzione per $\Rightarrow$

- Dobbiamo estendere il concetto di occorrenza positiva o negativa alle formule quantificate
  - P occorre positivamente in $(\forall x.P)$ ed in $(\exists x.P)$
-
$$\frac{(P \Rightarrow Q) \in \Gamma \quad P \text{ occorre positivamente in } R}{\Gamma \vdash R \Rightarrow R[Q/P]}$$
-
$$\frac{(P \Rightarrow Q) \in \Gamma \quad P \text{ occorre negativamente in } R}{\Gamma \vdash R[Q/P] \Rightarrow R}$$

Esempio di dimostrazione nel CP: complemento

- Quindi: una **dimostrazione** di ϕ a partire da un insieme di premesse Γ è una sequenza $\phi_1, ..., \phi_n = \phi$ dove $\phi_i \in \Gamma$ oppure è ottenuta applicando una regola di inferenza a partire da Γ e $\phi_1, \ldots \phi_{i-1}$
- Vediamo come "leggere" le nostre dimostrazioni in questo modo. Γ sono le leggi già dimostrate.

Dimostrazione di $p \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q$ **(Complemento)**

	$\underline{p \vee (\neg p \wedge q)}$	$\phi_1 = p \vee (\neg p \wedge q) \equiv \underline{p \vee (\neg p \wedge q)}$
$\equiv$	$\{(\text{Distr.})\}$	$\{$Regola: (Sost-$\equiv$), applicata a ϕ_1 e (Distr.)$\}$
	$(\underline{p \vee \neg p}) \wedge (p \vee q)$	$\phi_2 = p \vee (\neg p \wedge q) \equiv \underline{(p \vee \neg p)} \wedge (p \vee q)$
$\equiv$	$\{(\text{Terzo Escluso})\}$	$\{$(Sost-$\equiv$), applicata a ϕ_2 e (Terzo Escluso)$\}$
	$\underline{\mathbf{T} \wedge (p \vee q)}$	$\phi_3 = p \vee (\neg p \wedge q) \equiv \underline{\mathbf{T} \wedge (p \vee q)}$
$\equiv$	$\{(\text{Unità})\}$	$\{$(Sost-$\equiv$), applicata a ϕ_3 e (Unità)$\}$
	$(p \vee q)$	$\phi_4 = p \vee (\neg p \wedge q) \equiv (p \vee q)$

- Quindi le nostre dimostrazioni sono una notazione più compatta della definizione generale.

Teorema di Deduzione

- Ora che abbiamo introdotto le premesse di una dimostrazione e il concetto di conseguenza logica, possiamo introdurre il Teorema di Deduzione:

$$\Gamma \models P \Rightarrow Q$$

se e solo se

$$\Gamma, P \models Q$$

- Intuitivamente $\Gamma \models P \Rightarrow Q$ significa che in ogni interpretazione $\mathcal{I}$ che è un modello di Γ abbiamo che $\mathcal{I}$ soddisfa la formula $P \Rightarrow Q$. Quindi dalla semantica dell'implicazione abbiamo due casi
  - P è falso in $\mathcal{I}$. In questo caso $\mathcal{I}$ non è un modello di Γ, P!!
  - Sia P che Q sono veri in $\mathcal{I}$. In questo caso $\mathcal{I}$ è un modello di Γ, P e soddisfa anche Q!

Teorema di Deduzione: dimostrazione di implicazioni

- Il teorema di Teorema di Deduzione suggerisce uno schema di dimostrazione per le implicazioni

$$\Gamma \vdash P \Rightarrow Q$$
$$\text{se e solo se}$$
$$\Gamma, P \vdash Q$$

- Ovvero per dimostrare una implicazione $P \Rightarrow Q$ è possibile costruire una dimostrazione per Q usando sia le leggi generali (formule valide) che P come ipotesi

Dimostrazione di Implicazioni: Esempio

Dimostrare la seguente tautologia

$$(\neg P \vee Q \;\Rightarrow\; \neg R) \wedge ((\neg P \vee \neg Q) \wedge P \;\Rightarrow\; \neg S) \Rightarrow (R \;\Rightarrow\; \neg S)$$

1. Si fornisca una dimostrazione per sostituzione partendo dalla premessa $(\neg P \vee Q \;\Rightarrow\; \neg R) \wedge ((\neg P \vee \neg Q) \wedge P \;\Rightarrow\; \neg S)$ ed arrivando alla conseguenza $(R \;\Rightarrow\; \neg S)$
2. Si fornisca una dimostrazione per sostituzione usando le ipotesi non tautologiche

Dimostrazione di Implicazioni: Esempio

- Dimostrare la seguente tautologia

$$(\neg P \vee Q \Rightarrow \neg R) \wedge ((\neg P \vee \neg Q) \wedge P \Rightarrow \neg S) \Rightarrow (R \Rightarrow \neg S)$$

- I due schemi di dimostrazione possono essere formalizzati come

  1. dimostrare che

  $$\vdash (\neg P \vee Q \Rightarrow \neg R) \wedge ((\neg P \vee \neg Q) \wedge P \Rightarrow \neg S) \Rightarrow (R \Rightarrow \neg S)$$

  2. oppure dimostrare che

  $$\{(\neg P \vee Q \Rightarrow \neg R), ((\neg P \vee \neg Q) \wedge P \Rightarrow \neg S)\} \vdash (R \Rightarrow \neg S)$$

Conseguenza Logica e Inferenze Corrette

- Esempio di *sillogismo*
  - Tutti gli uomini sono mortali
  - Socrate è un uomo
  - Socrate è mortale
- Come possiamo formalizzare il problema deduttivo?
- Se la conclusione è *conseguenza logica* delle premesse
  - Tutti gli uomini sono mortali

$$(\forall x.U(x) \;\Rightarrow\; M(x))$$

  - Socrate è un uomo: $U(S)$
  - Socrate è mortale: $M(S)$
- Il problema deduttivo è corretto dato che

$$\models (\forall x.U(x) \;\Rightarrow\; M(x)) \land U(S) \;\Rightarrow\; M(S)$$

- o analogamente per il teorema di deduzione

$$\{(\forall x.U(x) \;\Rightarrow\; M(x)), U(S)\} \models M(S)$$