Logica per la Programmazione

Lezione 11

- Logica del Primo Ordine con Quantificatori Funzionali
- Leggi per i Quantificatori Funzionali

Estensione del Primo Ordine con Quantificatori Funzionali

- Abbiamo esteso il linguaggio del primo ordine con
  - notazione intensionale per insiemi
  - simboli di disuguaglianza
  - notazione per intervalli
  - abbiamo introdotto le relative leggi e alcune leggi per le formule con dominio
- Ora aggiungiamo alcuni "quantificatori funzionali" che
  - sommatoria di un insieme di valori
  - cardinalità di un insieme
  - minimo/massimo di un insieme di valori
  - sono quantificatori funzionali perché restituiscono un valore, non un booleano
- anche questi concetti saranno utili per la verifica di programmi con Triple di Hoare

Quantificatore Sommatoria

$$(\Sigma\ x : P(x).E(x))$$

- $P(x)$ è una formula (dominio della sommatoria) mentre $E(x)$ è un termine (un'espressione)
- denota la somma di tutti i valori $E(v)$ per tutti i valori v per cui vale $P(v)$
- Esempi:
  - $(\Sigma\ x : x > 0 \land x \leq 3.x^2) = 1 + 4 + 9 = 14$
  - $(\Sigma\ x : x \in [3,5).2x + 1) = 7 + 9 = 16$
  - $(\Sigma\ x : x \in [0,10) \land pari(x).x) = 0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20$
  - $(\Sigma\ x : x > 7 \land x \in [0,10).5) = 5 + 5 = 10$
  - $(\Sigma\ x : \mathbf{F}.2x + 5) = 0$

Quantificatore Cardinalità

$$\#\{x : P(x) | Q(x)\}$$

- in questo caso sia $P(x)$ e $Q(x)$ sono formule, in particolare $P(x)$ è il dominio
- denota il numero dei valori v per cui valgono sia $P(v)$ che $Q(x)$ (quindi $|$ ha il significato di "$\wedge$")
- Esempi:
  - $\#\{x : x \in [0, 10) | pari(x)\} = 5$
  - $\#\{x : x \in [0, 10) | (\exists . y \in \mathbb{N} \wedge y^2 = x)\} = 4$
  - $\#\{x : \mathbf{T} | x^2 \leq x\} = 2$
  - $\#\{x : \mathbf{F} | x \in [3, 5) \wedge pari(x)\} = 0$
- Nota: $\#$ può essere definita mediante Σ:

$$\#\{x : P | Q\} = (\Sigma x : P \wedge Q . 1) \quad \text{(Elim-\#)}$$

Quantificatori per Minimo e Massimo

- $a\ max\ b = a$ se $a \geq b$, b altrimenti ($a\ min\ b$ analogamente)
- $$(\mathbf{max}\ x : P(x).E(x))$$
  denota il massimo di $E(v)$ per tutti i valori v per cui vale $P(v)$
- $$(\mathbf{min}\ x : P(x).E(x))$$
  denota denota il minimo di $E(v)$ per tutti i valori v per cui vale $P(v)$
- $P(x)$ è una formula (dominio) e $E(x)$ è un' espressione

Minimo e Massimo: Esempi

- $(\textbf{max}\ x : x \in [3,10) \wedge primo(x).x^2) = 7^2 = 49$
- *Array* **a**

45	23	10	16	13

  - $(\textbf{min}\ i : i \in [0,5).a[i]) = 10$
  - $(\textbf{max}\ i : i \in [0,5) \wedge primo(a[i]).a[i]) = 23$
  - $(\textbf{max}\ i : i \in [0,5) \wedge primo(a[i]).i) = 4$

Sintassi del Primo Ordine con Quantificatori Funzionali

- Estendiamo le categorie sintattiche di termini, costanti ed espressioni con la sintassi vista:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathit{Term} & ::= & |(\Sigma\ \mathit{Var} : \mathit{Fbf} . \mathit{Term})|\#\{\mathit{Var} : \mathit{Fbf} | \mathit{Fbf}\}| \\
 & & (\mathbf{max}\ \mathit{Var} : \mathit{Fbf} . \mathit{Term})|(\mathbf{min}\ \mathit{Var} : \mathit{Fbf} . \mathit{Term})|\mathit{Exp} \\
\mathit{Const} & ::= & 0|1|2|\ldots|+\infty|-\infty \\
\mathit{Exp} & ::= & \quad \text{ordinarie espressioni aritmetiche}
\end{array}
$$

- x occorre **legata** in

$$(\Sigma\ x : P.E), \#\{x : P|Q\}, (\mathbf{max}\ x : P.E), (\mathbf{min}\ x : P.E)$$

Leggi per i Quantificatori Funzionali

- I quantificatori funzionali, introdotti come estensione della Logica dei Predicati, possono essere definiti nella logica estesa con i naturali.
- Nella dispensa [LP2] "Logica per la Programmazione: Applicazioni" sono riportate numerose leggi che descrivono loro proprietà.
- Molte di queste descrivono proprietà abbastanza ovvie: ne vediamo velocemente alcune.
- Altre sono molto importanti per la parte del corso su Triple di Hoare, e le vediamo in dettaglio.
- Come al solito, le leggi sono dimostrabili usando le definizioni e/o altre leggi.

Leggi Generali (come per le normali Quantificazioni)

Ad esempio:

- **Legge di ridenominazione**

$$(\Sigma\ x : P.E) \equiv (\Sigma\ y : P[y/x].E[y/x])$$

se y non occorre né in P né in E

- **Legge di annidamento**

$$(\Sigma\ y : R.(\Sigma\ x : S.P)) = (\Sigma\ x : S.(\Sigma\ y : R.P))$$

se y non è libero in S e x non è libero in R

Leggi Specifiche

- **(min:max)**

$$(\mathbf{min}\ x : P.-E) = -(\mathbf{max}\ x : P.E)$$

- Dominio equivalente (analogamente per gli altri quantificatori):

$$(\forall x.P \equiv Q) \Rightarrow \#\{x : P|R\} = \#\{x : Q|R\} \quad (\# :\equiv)$$

- Inclusione di Dominio:
  - $(\forall x.P \Rightarrow Q) \Rightarrow \#\{x : P|R\} \leq \#\{x : Q|R\} \quad (\# :\Rightarrow)$
  - $(\forall x.P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\mathbf{min}\ x : P.E) \geq (\mathbf{min}\ x : Q.E) \quad (min :\Rightarrow)$
  - $(\forall x.P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\mathbf{max}\ x : P.E) \leq (\mathbf{max}\ x : Q.E) \quad (max :\Rightarrow)$
  - $(\forall x.E \geq 0 \wedge P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\Sigma\ x : P.E) \leq (\Sigma\ x : Q.E) \quad (\Sigma :\Rightarrow)$
  - $(\forall x.E \leq 0 \wedge P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\Sigma\ x : P.E) \geq (\Sigma\ x : Q.E) \quad (\Sigma :\Rightarrow)$

Leggi di Distributività

- $(\Sigma\ x : P.E + F) = (\Sigma\ x : P.E) + (\Sigma\ x : P.F) \quad (\Sigma : +)$
- $(\mathbf{max}\ x : P.E\ max\ F) = (\mathbf{max}\ x : P.E)\ max\ (\mathbf{max}\ x : P.F)$
- $(\mathbf{min}\ x : P.E\ min\ F) = (\mathbf{min}\ x : P.E)\ min\ (\mathbf{min}\ x : P.F)$

Costante

- se x non è libera in c

$$(\Sigma\ x : P.c) = c \times (\Sigma\ x : P.1)$$

- se x non è libera in c e P non è vuoto

$$(\mathbf{m}\ x : P.c) = c$$

- se x non è libera in c

$$(\Sigma\ x : P.c \times E) = c \times (\Sigma\ x : P.E)$$

- se x non è libera in c e P non è vuoto

$$(\mathbf{m}\ x : P.c + E) = c + (\mathbf{m}\ x : P.E)$$

Leggi di Dominio

- $$(\Sigma\ x : P \vee Q.E) = (\Sigma\ x : P.E) + (\Sigma\ x : Q.E) - (\Sigma\ x : P \wedge Q.E)$$

- $$\#\{x : P \vee Q | R\} = \#\{x : P | R\} + \#\{x : Q | R\} - \#\{x : P \wedge Q | R\}$$

- $$(\mathbf{max}\ x : P \vee Q.E) = (\mathbf{max}\ x : P.E)\ \mathit{max}\ (\mathbf{max}\ x : Q.E)$$

  $$(\mathbf{min}\ x : P \vee Q.E) = (\mathbf{min}\ x : P.E)\ \mathit{min}\ (\mathbf{min}\ x : Q.E)$$

Singoletto e Dominio Vuoto

- $$(\Sigma\ x : x = y . E) = E[y/x]$$
- $$\#\{x : x = y | R\} = \begin{cases} 1 & \text{se } R[y/x] \\ 0 & \text{se } \neg R[y/x] \end{cases}$$
- se P è vuoto
  - $$(\Sigma\ x : P . E) = 0$$
  - $$\#\{x : P | R\} = 0$$
  - $$\begin{array}{l} (\mathbf{min}\ x : P . E) = +\infty \\ (\mathbf{max}\ x : P . E) = -\infty \end{array}$$

Leggi dell'Intervallo

Sia $[a, b]$ un intervallo non vuoto di naturali e P una formula

$$(\Sigma\, x : x \in [a, b] \wedge P.E) = \begin{cases} (\Sigma\, x : x \in [a, b) \wedge P.E) + E[b/x] & \text{se } P[b/x] \\ (\Sigma\, x : x \in [a, b) \wedge P.E) & \text{se } \neg P[b/x] \end{cases}$$

$$\#\{x : x \in [a, b] | P\} = \begin{cases} \#\{x : x \in [a, b) | P\} + 1 & \text{se } P[b/x] \\ \#\{x : x \in [a, b) | P\} & \text{se } \neg P[b/x] \end{cases}$$

$$(\mathbf{m}\, x : x \in [a, b] \wedge P.E) = \begin{cases} (\mathbf{m}\, x : x \in [a, b) \wedge P.E)\ m\ E[b/x] & \text{se } P[b/x] \\ (\mathbf{m}\, x : x \in [a, b) \wedge P.E) & \text{se } \neg P[b/x] \end{cases}$$

Attenzione: queste leggi potrebbero essere errate nella dispensa

Uso di Leggi dell'Intervallo: Esempio

$$s = (\Sigma\ x : x \in [1,3] \wedge pari(x).x^2) \equiv (s = 4)$$

$$\begin{array}{ll}
 & s = (\Sigma\ x : x \in [1,3] \wedge pari(x).x^2) \\
\equiv & \quad \{(\text{Intervallo-}\Sigma),\ \neg pari(3)\} \\
 & s = (\Sigma\ x : x \in [1,2] \wedge pari(x).x^2) \\
\equiv & \quad \{(\text{Intervallo-}\Sigma),\ pari(2)\} \\
 & s = (\Sigma\ x : x \in [1,1] \wedge pari(x).x^2) + 2^2 \\
\equiv & \quad \{(\text{Intervallo-}\Sigma),\ \neg pari(1)\} \\
 & s = (\Sigma\ x : x \in \emptyset \wedge pari(x).x^2) + 2^2 \\
\equiv & \quad \{(\Sigma\text{-vuoto})\} \\
 & s = 0 + 2^2 \\
\equiv & \quad \{\text{calcolo}\} \\
 & s = 4
\end{array}$$

Formalizzazione di Enunciati

Si assuma che la sequenza **a** sia un array con dominio $[0, n)$

- la sequenza **a** contiene più numeri pari che numeri dispari
- x è il numero di elementi della sequenza **a** che sono maggiori della somma degli elementi che lo precedono
- x è uguale alla somma dei quadrati degli elementi di **a** con indice pari
- la sequenza **a** contiene un solo elemento uguale alla sua posizione
- gli elementi di indice pari della sequenza a sono dispari
- la sequenza **a** è palindroma, ovvero simmetrica rispetto al suo punto centrale

Formalizzazione di Enunciati con Quantificatori Funzionali

- x è il Massimo Comun Divisore di y e z (usando il predicato $Divide(x, y) \equiv (\exists z.y = x * z))$
- x è un numero **perfetto** (cioè è la somma dei suoi divisori eccetto se stesso)