CALCOLO PROPOSIZIONALE: CENNI

Francesca Levi

Dipartimento di Informatica

February 26, 2016

La Logica

- La logica è la disciplina che studia le condizioni di correttezza del ragionamento

> *"Occorre dire, anzitutto, quale oggetto riguardi ed a quale disciplina spetti la presente indagine, che essa cioè riguarda la dimostrazione e spetta alla scienza dimostrativa: in seguito, bisogna precisare cosa sia la premessa, cosa sia il termine, cosa sia il sillogismo..."* Aristotele

- Esempio di *sillogismo*
  - Tutti gli uomini sono mortali
  - Socrate è un uomo
  - Socrate è mortale

La Logica

Non tutti i sillogismi sono validi:

- Tutti gli animali sono mortali
- Pippo è mortale
- Pippo è un animale

- Tutti gli dei sono immortali
- Gli uomini non sono dei
- Gi uomini sono mortali

Logica Matematica e Informatica

- La logica matematica ha profondi legami con l'informatica:
  - l'informatica ha dato nuovo impulso allo studio della LM
  - la LM è parte integrante dei fondamenti teorici dell'informatica
- Usi della Logica Matematica in Informatica:
  - formalizzazione di requisiti
  - dimostrazione di proprietà di programmi (es: logica di Hoare)
  - fondamenti di programmazione dichiarativa (PROLOG)
  - fondamenti di strumenti di analisi e di verifica di sistemi
    - Model checking
    - Theorem proving

Calcolo Proposizionale: Cenni

- Calcolo Proposizionale
  - Connettivi logici e loro proprietà
  - Tautologie, deduzione corretta

Un Problema di Deduzione Logica [da un test di ingresso]

- Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema. Si sa che:
  - Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio;
  - Condizione necessaria affinché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno
- Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che:
  1. Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
  2. Nessuno dei tre amici è andato al cinema
  3. Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
  4. Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno
- *Come si formalizza? Come si può usare una dimostrazione per rispondere alla domanda?*

Il Calcolo Proposizionale

- È il nucleo di (quasi) tutte le logiche. Limitato potere espressivo, ma sufficiente per introdurre il concetto di deduzione
- Le *proposizioni* (*enunciati dichiarativi*) sono asserzioni a cui sia assegnabile in modo univoco un valore di verità in accordo ad una interpretazione del mondo a cui si riferiscono.
- *"dichiarativi sono non già tutti i discorsi, ma quelli in cui sussiste una enunciazione vera oppure falsa"* Aristotele

Esempi di Proposizioni "Atomiche"

1. Roma è la capitale d'Italia
2. La Francia è uno stato del continente asiatico
3. $1+1 = 2$
4. $2+2 = 3$

Esempi di Non Proposizioni

1. Che ora è?
2. Leggete queste note con attenzione
3. $x+1 = 2$

Connettivi Logici

Connettivo	Forma simbolica	Operazione corrispondente
not	$\neg p$	*negazione*
and, *e*	$p \wedge q$	*congiunzione*
or, *o*	$p \vee q$	*disgiunzione*
se p allora q	$p \Rightarrow q$	*implicazione*
p se e solo se q	$p \equiv q$	*equivalenza*

Calcolo Proposizionale

- Sintassi: definisce in modo formale le asserzioni (formule) del calcolo proposizionale
- Semantica: definisce in modo formale il significato delle (formule) del calcolo proposizionale

Sintassi delle Proposizioni (Grammatica)

$$
\begin{array}{lcl}
\mathit{Prop} & ::= & \\
 & & \mathit{Prop} \equiv \mathit{Prop} \mid \mathit{Prop} \wedge \mathit{Prop} \mid \mathit{Prop} \vee \mathit{Prop} \mid \\
 & & \mathit{Prop} \Rightarrow \mathit{Prop} | \mathit{Atom} \mid \neg \mathit{Atom} \\
\mathit{Atom} & ::= & \\
 & & \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid \mathit{Ide} \mid (\mathit{Prop}) \\
\mathit{Ide} & ::= & \\
 & & p \mid q \mid \ldots \mid P \mid Q \mid \ldots
\end{array}
$$

Semantica (significato) delle Proposizioni

Tabelle di verità dei connettivi logici:

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \equiv Q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Si osservi in particolare il valore di verità di un'implicazione

Interpretazione di una Formula Proposizionale

- **Interpretazione**: funzione da variabili proposizionali a $\{T, F\}$
- Un' interpretazione determina il valore di verità di una formula
- Tale valore può essere determinato usando le tabelle di verità (induttivamente sulla sintassi della formula)
- Analogamente, si può derivare una tabella raccogliendo i valori per tutte le Interpretazioni (Tabella di Verità della Formula)

Un Esempio

- Un'interpretazione determina il valore di verità di una formula
  - Formula $(P \wedge Q) \vee \neg R$
  - Interpretazione $\{P \mapsto T, Q \mapsto F, R \mapsto F\}$
  - Valore di verità usando una tabella (sfruttando quella dei connettivi):

P	Q	R	$((P$	$\wedge$	$Q)$	$\vee$	$\neg$	$R)$
T	F	F	T	F	F	**T**	T	F
			(1)	(2)	(1)	**(3)**	(2)	(1)

Tabella di Verità di una Formula: raccoglie tutte le Interpretazioni

- Un esempio

P	Q	R	$((P$	$\wedge$	$Q)$	$\vee$	$\neg$	$R)$
T	T	T	T	T	T	**T**	F	T
T	T	F	T	T	T	**T**	T	F
T	F	T	T	F	F	**F**	F	T
T	F	F	T	F	F	**T**	T	F
F	T	T	F	F	T	**F**	F	T
F	T	F	F	F	T	**T**	T	F
F	F	T	F	F	F	**F**	F	T
F	F	F	F	F	F	**T**	T	F
			(1)	(2)	(1)	(3)	(2)	(1)

Tautologie e Contraddizioni

- Una **tautologia** è una formula del calcolo proposizionale che vale **T** per qualunque interpretazione
  - Esempio: $\mathbf{p} \vee \neg \mathbf{p}$ (vedi tabella di verità)
- Una **contraddizione** è una formula che vale **F** per qualunque per qualunque interpretazione
  - Esempio: $\mathbf{p} \wedge \neg \mathbf{p}$ (vedi tabella di verità)
- Una formula è **soddisfacibile** se esiste almeno una interpretazione che la rende **T**
- Quindi $\mathbf{p}$ è una tautologia se e solo se $\neg \mathbf{p}$ è una contraddizione

Come si vede che una Formula non è una Tautologia?

- Esempio: Mostrare che $((A \Rightarrow B) \wedge \neg A) \Rightarrow B$ non è una tautologia
- Basta trovare un'interpretazione che la rende falsa
- Evitare di costruire l'intera tabella di verità!!!
- Determiniamo valori di verità per A e B che rendano falsa la formula
  - Poiché è un'implicazione, è falsa solo quando la premessa è vera e la conseguenza è falsa
  - Quindi $\{B \mapsto \mathbf{F}\}$
  - La premessa è una congiunzione: per essere vera entrambi gli argomenti devono essere veri
  - $\neg A$ è vera solo se $\{A \mapsto \mathbf{F}\}$
  - Quindi abbiamo trovato l'interpretazione $\{A \mapsto \mathbf{F}, B \mapsto \mathbf{F}\}$
  - Resta da controllare che renda la formula falsa

Calcolo Proposizionale per formalizzare Enunciati: Esempio

- Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema.
  - Introduciamo tre proposizioni:
    - $A \equiv$ "Antonio va al cinema"
    - $B \equiv$ "Bruno va al cinema"
    - $C \equiv$ "Corrado va al cinema"
- Si sa che:
  - Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio;
    - $C \Rightarrow A$
- Condizione necessaria affinché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno.
    - $A \Rightarrow B$

Calcolo Proposizionale per formalizzare Enunciati: Esempio (cont.)

- Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che:
  - Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
    - $C \Rightarrow B$
  - Nessuno dei tre amici è andato al cinema
    - $(\neg A) \wedge (\neg B) \wedge (\neg C)$
  - Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
    - $B \Rightarrow C$
  - Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno
    - $(\neg C) \Rightarrow (\neg B)$
- Per rispondere alla domanda, dobbiamo capire quale di queste quattro proposizioni è **conseguenza logica** delle proposizioni precedenti

Come possiamo essere certi della risposta?

- Bisogna determinare quale delle ultime 4 formule è conseguenza logica delle premesse, cioè quale delle seguenti formule è una tautologia:
  1. $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$
  2. $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow ((\neg A) \ \wedge \ (\neg B) \ \wedge \ (\neg C))$
  3. $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
  4. $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow ((\neg C) \Rightarrow (\neg B))$
- Si possono verificare con tabelle di verità o trovando un controesempio
- Chiaramente la (1) è una tautologia, mentre la (2), (3) e la (4) non sono tautologie !!!!

Come si vede che una Formula non è una Tautologia?

- Esempio: (3) $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
- Basta trovare un'interpretazione che la rende falsa (un controesempio)
  - Determiniamo valori di verità per A, B e C che rendano falsa la formula
  - Poiché è un'implicazione, è falsa solo quando la premessa è vera e la conseguenza è falsa
  - Quindi $(B \Rightarrow C)$ deve essere falso, quindi $\{B \mapsto \mathbf{T}, C \mapsto \mathbf{F}\}$
  - A questo punto si vede che per qualunque valore di A la premessa è vera.
  - Quindi le seguenti interpretazioni rendono la formula falsa: $\{A \mapsto \mathbf{T}, B \mapsto \mathbf{T}, C \mapsto \mathbf{F}\}$ e $\{A \mapsto \mathbf{F}, B \mapsto \mathbf{T}, C \mapsto \mathbf{F}\}$

Inferenze Logiche: Esercizi

Considerare le seguenti proposizioni

- $AC \equiv$ "Andrea è colpevole"
- $AP \equiv$ "Andrea viene punito "

Valutare quali di queste inferenze sono *logicamente corrette* usando i simboli proposizionali sopra introdotti:

1. Se Andrea è colpevole allora viene punito. Andrea è colpevole. Quindi Andrea viene punito.
2. Se Andrea è colpevole allora viene punito. Andrea *non* è colpevole. Quindi Andrea *non* viene punito.
3. Se Andrea è colpevole allora viene punito. Andrea *non* viene punito. Quindi Andrea *non* è colpevole.
4. Se Andrea è colpevole allora viene punito. Andrea viene punito. Quindi Andrea è colpevole.

Formalizzazione di Enunciati: Esercizi

- Piove e fa molto freddo
- Fa freddo, ma non piove
- Se ci sono nuvole e non c'è vento, allora piove
- Piove solo se ci sono nuvole e non c'è vento
- Piove se e solo se ci sono nuvole e non c'è vento
- Nevica, ma non fa freddo se ci si copre
- Se ci si copre, allora fa freddo o nevica

Esercizi: Tautologie

Determinare se le seguenti formule proposizionali sono tautologie, contraddizioni o soddisfacibili:

1. $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$,
2. $P \wedge ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q)$,
3. $(P \wedge Q) \Rightarrow Q$,
4. $(P \vee Q) \Rightarrow Q$,
5. $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow R$