

LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE – a.a. 2017/18

Sesta esercitazione – 5-6 dicembre 2017– Soluzioni Proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1 Si verifichino le seguenti triple (A è una variabile di specifica).

<p>1. $\{A > 0 \wedge x = A \wedge y < x\}$ $x := 2 * x + y$ $\{y < x\}$</p> <p>2. $\{y > 0 \wedge x = y * y\}$ $x := x + 2 * y + 1; \quad y := y + 1$ $\{x = y * y\}$</p>	<p>3. $\{n > 0 \wedge y = x * n\}$ $y, x := y + n, x + 1$ $\{y = x * n\}$</p> <p>4. $\{sum = (\sum i: i \in [0, x] . i)\}$ $sum := sum + x; \quad x := x + 1$ $\{sum = (\sum i: i \in [0, x] . i)\}$</p>
--	---

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

$$1. \quad \{A > 0 \wedge x = A \wedge y < x\}$$

$$x := 2 * x + y$$

$$\{y < x\}$$

Possiamo ricorrere alla Regola dell'Assegnamento

$$\frac{R \Rightarrow def(E) \wedge P[E/x]}{\{R\}x := E\{P\}}$$

dove $def(E)$ è vera in uno stato σ se il valore di E in σ (cioè $\mathcal{E}(E, \sigma)$) è ben definito. L'assegnamento $x := E$ parte dallo stato σ e arriva nello stato $\sigma[\mathcal{E}(E, \sigma)/x]$.

La verifica si riduce allora a dimostrare che:

$$A > 0 \wedge x = A \wedge y < x \Rightarrow def(2 * x + y) \wedge (y < x)[(2 * x + y)/x]$$

Partiamo dalla conseguenza, applicando la sostituzione, ed utilizzando le premesse come ipotesi. Notiamo inoltre che $def(2 * x + y) \equiv \mathbf{T}$.

$$y < 2 * x + y$$

$$\equiv \{ \mathbf{Ip}: x = A \}$$

$$y < (2 * A + y)$$

$$\equiv \{ \mathbf{Ip}: A > 0, \text{ calcolo} \}$$

T

$$2. \quad \{y > 0 \wedge x = y * y\}$$

$$x := x + 2 * y + 1; \quad y := y + 1$$

$$\{x = y * y\}$$

Applicando la Regola della Sequenza, dobbiamo trovare un'asserzione R tale che le seguenti triple siano verificate:

$$(2.1) \quad \{y > 0 \wedge x = y * y\} \quad x := x + 2 * y + 1 \quad \{R\}$$

$$(2.2) \quad \{R\} \quad y := y + 1 \quad \{x = y * y\}$$

Per l'Assioma dell'Assegnamento, la (2.2) è verificata per il seguente valore di R :

$$def(y + 1) \wedge (x = y * y)[y + 1/y]$$

$$\equiv \quad \{\text{sostituzione, definizione di } def\}$$

$$x = (y + 1) * (y + 1)$$

Allora, per la Regola dell'Assegnamento, la verifica di (2.1) con la postcondizione R appena calcolata, si riduce a dimostrare che:

$$(y > 0 \wedge x = y * y) \Rightarrow def(x + 2 * y + 1) \wedge (x = (y + 1) * (y + 1))[x + 2 * y + 1/x]$$

Partiamo dalla conseguenza:

$$def(x + 2 * y + 1) \wedge (x = (y + 1) * (y + 1))[x + 2 * y + 1/x]$$

$$\equiv \quad \{\text{sostituzione, definizione di } def\}$$

$$(x + 2 * y + 1) = (y + 1) * (y + 1)$$

$$\equiv \quad \{\text{calcolo}\}$$

$$(x + 2 * y + 1) = (y * y + 2 * y + 1)$$

$$\equiv \quad \{\mathbf{Ip}: x = y * y\}$$

T

$$3. \quad \begin{array}{l} \{n > 0 \wedge y = x * n\} \\ \quad y, x := y + n, x + 1 \\ \{y = x * n\} \end{array}$$

Allora, per la Regola dell'Assegnamento, ci riduciamo a dimostrare che:

$$n > 0 \wedge y = x * n \Rightarrow def(y + n) \wedge def(x + 1) \wedge (y = x * n)[y + n/y, x + 1/x]$$

Partiamo dalla conseguenza:

$$def(y + n) \wedge def(x + 1) \wedge (y = x * n)[y + n/y, x + 1/x]$$

$$\equiv \quad \{\text{sostituzione, definizione di } def\}$$

$$y + n = (x + 1) * n$$

$$\equiv \quad \{\text{calcolo}\}$$

$$y + n = x * n + n$$

$$\equiv \quad \{\mathbf{Ip}: y = x * n\}$$

T

$$4. \quad \left\{ \begin{array}{l} sum = (\Sigma i: i \in [0, x] . i) \\ sum := sum + x; x := x + 1 \\ sum = (\Sigma i: i \in [0, x] . i) \end{array} \right\}$$

Applicando la Regola della Sequenza, dobbiamo trovare un'asserzione R tale che le seguenti triple siano verificate:

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} sum = (\Sigma i: i \in [0, x] . i) \\ sum := sum + x \\ R \end{array} \right\}$$

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} R \\ x := x + 1 \\ sum = (\Sigma i: i \in [0, x] . i) \end{array} \right\}$$

Per l'Assioma dell'Assegnamento, la (4.2) è verificata per il seguente valore di R :

$$def(x + 1) \wedge sum = (\Sigma i: i \in [0, x] . i)[x + 1/x]$$

$$\equiv \quad \{\text{definizione di } def \text{ e sostituzione}\}$$

$$sum = (\Sigma i: i \in [0, x + 1] . i)$$

Per verificare (4.1), per la Regola dell'Assegnamento, con la postcondizione R appena calcolata, si riduce a dimostrare che:

$$sum = (\Sigma i: i \in [0, x] . i) \Rightarrow def(sum + x) \wedge (sum = (\Sigma i: i \in [0, x + 1] . i))[sum + x/sum]$$

Partiamo dalla conseguenza, applicando la sostituzione, usando la premessa come ipotesi e notando che $def(sum + x) \equiv \mathbf{T}$:

$$sum + x = (\Sigma i: i \in [0, x + 1] . i)$$

$$\equiv \quad \{\mathbf{Ip}: sum = (\Sigma i: i \in [0, x] . i)\}$$

$$(\Sigma i: i \in [0, x] . i) + x = (\Sigma i: i \in [0, x + 1] . i)$$

$$\equiv \quad \{(\text{Legge dell'intervallo per la sommatoria})\}$$

T

ESERCIZIO 2 Si dica se le seguenti triple sono verificate oppure no (A e B sono variabili di specifica). Motivare formalmente le risposte.

$$1. \quad \{x = A \wedge y = B \wedge B > 0 \wedge A \geq B \wedge z = 0\} \quad z := x + y; \quad y := y - z \{y < 0\},$$

$$2. \quad \{x = A \wedge y = B \wedge B > 0 \wedge A \geq B \wedge z = 0\} \quad z, y := x + y, y - z \{y < 0\}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

$$1. \{x = A \wedge y = B \wedge B > 0 \wedge A \geq B \wedge z = 0\} z := x + y; \quad y := y - z \{y < 0\},$$

Applicando la Regola della Sequenza, dobbiamo trovare un'asserzione R tale che le seguenti triple siano verificate:

$$(1.1) \quad \{x = A \wedge y = B \wedge B > 0 \wedge A \geq B\} z := x + y \{R\}$$

$$(1.2) \quad \{R\} y := y - z \{y < 0\}$$

Per l'Assioma dell'Assegnamento, la (1.2) è verificata per il seguente valore di R :

$$def(y - z) \wedge (y < 0)[(y - z)/y]$$

$$\equiv \quad \{\text{sostituzione, definizione di } def\}$$

$$(y - z < 0)$$

Per la Regola dell'Assegnamento, la verifica di (1.1) con la postcondizione R appena calcolata, si riduce a dimostrare che:

$$(x = A \wedge y = B \wedge B > 0 \wedge A \geq B) \Rightarrow def(x + y) \wedge (y - z < 0)[x + y/z]$$

Partiamo dalla conseguenza:

$$def(x + y) \wedge (y - z < 0)[x + y/z]$$

$$\equiv \quad \{\text{sostituzione, definizione di } def\}$$

$$y - (x + y) < 0$$

$$\equiv \quad \{\text{calcolo}\}$$

$$-x < 0$$

$$\equiv \quad \{\mathbf{Ip}: x = A \wedge A \geq B \wedge B > 0\}$$

T

$$2. \{x = A \wedge y = B \wedge B > 0 \wedge A \geq B \wedge z = 0\} z, y := x + y, y - z \{y < 0\}$$

Abbiamo qui un caso di Assegnamento Multiplo e non Semplice, che prevede di valutare tutte le espressioni **prima** di tutti gli assegnamenti. Applicando la regola dell'Assegnamento Multiplo ci riduciamo a verificare:

$$(x = A \wedge y = B \wedge B > 0 \wedge A \geq B \wedge z = 0) \Rightarrow \\ def(x + y) \wedge def(y - z) \wedge (y < 0)[(x + y)/z, (y - z)/y]$$

Partiamo dalla conseguenza:

$$def(x + y) \wedge def(y - z) \wedge (y < 0)[(x + y)/z, (y - z)/y]$$

$$\equiv \quad \{\text{sostituzione, definizione di } def\}$$

$$y - z < 0$$

$$\equiv \quad \{\mathbf{Ip}: y = B \wedge z = 0\}$$

$$B < 0$$

$$\equiv \quad \{\mathbf{Ip}: B > 0\}$$

F

Quindi la tripla non è verificata.

ESERCIZIO 3 Si verifichi la seguente tripla.

$$\begin{aligned} & \{x \geq 0 \wedge y = (\Sigma i : i \in [0, x] \wedge i \% 6 = 0 . i)\} \\ & \quad \mathbf{if} \ x \% 6 = 0 \ \mathbf{then} \ y := y + x \ \mathbf{else} \ \mathbf{skip} \ \mathbf{fi}; \\ & \quad x := x + 1 \\ & \{y = (\Sigma i : i \in [0, x] \wedge i \% 6 = 0 . i)\} \end{aligned}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Applicando la Regola della Sequenza, dobbiamo trovare un'asserzione R tale che le seguenti triple siano verificate:

$$(3.1) \quad \{x \geq 0 \wedge y = (\Sigma i : i \in [0, x] \wedge i \% 6 = 0 . i)\} \ \mathbf{if} \ x \% 6 = 0 \ \mathbf{then} \ y := y + x \ \mathbf{else} \ \mathbf{skip} \ \mathbf{fi} \ \{R\}$$

$$(3.2) \quad \{R\} \ x := x + 1 \ \{y = (\Sigma i : i \in [0, x] \wedge i \% 6 = 0 . i)\}$$

Per l'Assioma dell'Assegnamento, la (3.2) è verificata per R uguale a:

$$def(x + 1) \wedge (y = (\Sigma i : i \in [0, x] \wedge i \% 6 = 0 . i))[x + 1/x]$$

Quindi semplificando, abbiamo che R è:

$$(y = (\Sigma i : i \in [0, x] \wedge i \% 6 = 0 . i))$$

Per la (3.1), applichiamo la Regola del Condizionale, per la quale dobbiamo verificare che

$$(3.1.1) \quad x \geq 0 \wedge y = (\Sigma i : i \in [0, x] \wedge i \% 6 = 0 . i) \Rightarrow def(x \% 6 = 0)$$

ovvia essendo $def(x \% 6 = 0) \equiv \mathbf{T}$

$$(3.1.2) \quad \{x \geq 0 \wedge y = (\Sigma i : i \in [0, x] \wedge i \% 6 = 0 . i) \wedge (x \% 6 = 0)\} \ y := y + x \ \{R\}$$

$$(3.1.3) \quad \{x \geq 0 \wedge y = (\Sigma i : i \in [0, x] \wedge i \% 6 = 0 . i) \wedge \neg(x \% 6 = 0)\} \ \mathbf{skip} \ \{R\}$$

Per la (3.1.2), usiamo la Regola dell'Assegnamento, dobbiamo dimostrare, ignorando $def(y + x)$ che è equivalente a \mathbf{T} , l'implicazione

$$\begin{aligned} (x \geq 0 \wedge y = (\Sigma i : i \in [0, x] \wedge i \% 6 = 0 . i) \wedge (x \% 6 = 0)) \\ \Rightarrow \\ (y + x = (\Sigma i : i \in [0, x] \wedge i \% 6 = 0 . i)) \end{aligned}$$

Partiamo dalla conclusione:

$$y + x = (\Sigma i : i \in [0, x] \wedge i \% 6 = 0 . i)$$

$$\equiv \quad \{\mathbf{Ip}: x \% 6 = 0, (\text{Intervallo-}\Sigma)\}$$

$$y + x = (\Sigma i : i \in [0, x] \wedge i \% 6 = 0 . i) + x$$

$$\begin{aligned} &\equiv \{\mathbf{Ip}: y = (\sum i : i \in [0, x] \wedge i \% 6 = 0 . i)\} \\ &\quad y + x = y + x \\ &\equiv \{\text{calcolo}\} \\ &\quad \mathbf{T} \end{aligned}$$

Per la (3.1.3), applichiamo l'Assioma del Comando Vuoto e la Regola PRE e ci riduciamo a dimostrare che:

$$x \geq 0 \wedge y = (\sum i : i \in [0, x] \wedge i \% 6 = 0 . i) \wedge \neg(x \% 6 = 0) \Rightarrow y = (\sum i : i \in [0, x] \wedge i \% 6 = 0 . i)$$

Partiamo dalla conclusione

$$y = (\sum i : i \in [0, x] \wedge i \% 6 = 0 . i)$$

$$\begin{aligned} &\equiv \{\mathbf{Ip}: x \% 6 \neq 0, (\text{Intervallo-}\Sigma)\} \\ &\quad y = (\sum i : i \in [0, x] \wedge i \% 6 = 0 . i) \\ &\equiv \{\mathbf{Ip}: y = (\sum i : i \in [0, x] \wedge i \% 6 = 0 . i)\} \\ &\quad \mathbf{T} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 4 Si forniscano due espressioni E_1 ed E_2 in modo che la seguente tripla (A e B sono variabili di specifica) sia verificata e si dimostri formalmente la correttezza della soluzione proposta. Si ricordi che le variabili di specifica non possono comparire in un comando.

$$\begin{aligned} &\{x = A \wedge y = B\} \\ &\quad \mathbf{if } x \leq y \mathbf{ then } x := E_1 \mathbf{ else } x := E_2 \mathbf{ fi} \\ &\{x > A \wedge x > B\} \end{aligned}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

Esaminando la tripla, ci si convince facilmente che E_1 deve essere un valore strettamente maggiore del valore iniziale di y , cioè B , mentre E_2 deve essere strettamente maggiore del valore iniziale di x , cioè A . Poiché A e B sono variabili di specifica non possiamo usarle direttamente nel programma, ma possiamo usare $E_1 = y + 1$ ed $E_2 = x + 1$.

Per la Regola del Condizionale dobbiamo verificare i seguenti punti:

$$(4.1) \quad (x = A \wedge y = B) \Rightarrow \text{def}(x \leq y)$$

Ovvia, per la definizione di def .

$$(4.2) \quad \boxed{\begin{aligned} &\{x = A \wedge y = B \wedge x \leq y\} \\ &\quad x := y + 1 \\ &\{x > A \wedge x > B\} \end{aligned}}$$

Per la regola (ASS) dobbiamo dimostrare che

$$x = A \wedge y = B \wedge x \leq y \Rightarrow \text{def}(y + 1) \wedge (x > A \wedge x > B)[y + 1/x]$$

Partiamo dalla conseguenza:

$$\begin{aligned} &\text{def}(y + 1) \wedge (x > A \wedge x > B)[y + 1/x] \\ &\equiv \{\text{definizione di def, sostituzione}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y + 1 > A \wedge y + 1 > B \\
\equiv & \quad \{\mathbf{Ip}: y = B\} \\
& B + 1 > A \wedge B + 1 > B \\
\equiv & \quad \{\text{calcolo}\} \\
& B + 1 > A \\
\equiv & \quad \{\mathbf{Ip}: x = A, y = B, x \leq y\}
\end{aligned}$$

T

$$(4.3) \quad \boxed{
\begin{array}{l}
\{x = A \wedge y = B \wedge x > y\} \\
x := x + 1 \\
\{x > A \wedge x > B\}
\end{array}
}$$

Per la regola (ASS) dobbiamo dimostrare che

$$x = A \wedge y = B \wedge x > y \Rightarrow \text{def}(x + 1) \wedge (x > A \wedge x > B)[x + 1/x]$$

La dimostrazione è analoga a quella mostrata nel caso (4.2)

ESERCIZIO 5 Si verifichi la seguente tripla.

$$\begin{array}{l}
\{x = A \wedge y = B \wedge A > 0 \wedge B > 0 \wedge \text{mcd}(x, y) = \text{mcd}(A, B)\} \\
\mathbf{if} \ x = y \ \mathbf{then} \ \text{skip} \ \mathbf{else} \ \mathbf{if} \ x > y \ \mathbf{then} \ x := x - y \ \mathbf{else} \ y := y - x \ \mathbf{fi} \ \mathbf{fi} \\
\{\text{mcd}(x, y) = \text{mcd}(A, B)\}
\end{array}$$

Si ricordano le proprietà dell'operatore *mcd*:

$$\text{mcd}(n, m) = \begin{cases} n & \text{se } n = m \\ \text{mcd}(n - m, m) & \text{se } n > m \\ \text{mcd}(n, m - n) & \text{se } n < m \end{cases}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 5

Per la Regola del Condizionale dobbiamo verificare i seguenti punti:

$$(5.1) \quad (x = A \wedge y = B \wedge A > 0 \wedge B > 0 \wedge \text{mcd}(x, y) = \text{mcd}(A, B)) \Rightarrow \text{def}(x = y)$$

Ovvia, per la definizione di *def*.

$$(5.2) \quad \boxed{
\begin{array}{l}
\{x = A \wedge y = B \wedge A > 0 \wedge B > 0 \wedge \text{mcd}(x, y) = \text{mcd}(A, B) \wedge x = y\} \\
\text{skip} \\
\{\text{mcd}(x, y) = \text{mcd}(A, B)\}
\end{array}
}$$

Ovvia per la regola (SKIP).

$$(5.3) \quad \boxed{
\begin{array}{l}
\{x = A \wedge y = B \wedge A > 0 \wedge B > 0 \wedge \text{mcd}(x, y) = \text{mcd}(A, B) \wedge x \neq y\} \\
\mathbf{if} \ x > y \ \mathbf{then} \ x := x - y \ \mathbf{else} \ y := y - x \ \mathbf{fi} \\
\{\text{mcd}(x, y) = \text{mcd}(A, B)\}
\end{array}
}$$

Per la (5.3) applicando di nuovo la Regola del Condizionale dobbiamo verificare:

$$(5.3.1) \quad (x = A \wedge y = B \wedge A > 0 \wedge B > 0 \wedge mcd(x, y) = mcd(A, B) \wedge x \neq y) \Rightarrow def(x > y)$$

Ovvia, per la definizione di def .

$$(5.3.2) \quad \boxed{\begin{array}{l} \{x = A \wedge y = B \wedge A > 0 \wedge B > 0 \wedge mcd(x, y) = mcd(A, B) \wedge x \neq y \wedge x < y\} \\ x := x - y \\ \{mcd(x, y) = mcd(A, B)\} \end{array}}$$

$$(5.3.3) \quad \boxed{\begin{array}{l} \{x = A \wedge y = B \wedge A > 0 \wedge B > 0 \wedge mcd(x, y) = mcd(A, B) \wedge x \neq y \wedge \neg(x < y)\} \\ y := y - x \\ \{mcd(x, y) = mcd(A, B)\} \end{array}}$$

Verifichiamo la (5.3.2) (la (5.3.3) è del tutto analoga). Chiamando P la premessa della (5.3.2), per la regola dell'assegnamento, dobbiamo dimostrare che

$$P \Rightarrow def(x - y) \wedge (mcd(x, y) = mcd(A, B))^{[x-y/x]}$$

Partiamo dalla conseguenza:

$$\begin{aligned} & def(x - y) \wedge (mcd(x, y) = mcd(A, B))^{[x-y/x]} \\ \equiv & \{sostituzione, definizione di def\} \\ & mcd(x - y, y) = mcd(A, B) \\ \equiv & \{\mathbf{Ip}: x > y, \text{ Proprietà di } mcd: x > y \Rightarrow mcd(x, y) = mcd(x - y, y)\} \\ & mcd(x, y) = mcd(A, B) \\ \equiv & \{\mathbf{Ip}: mcd(x, y) = mcd(A, B)\} \\ & \mathbf{T} \end{aligned}$$