LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE – a.a. 2017/18
Quinta esercitazione – 23/11/2017 – Soluzioni Proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1 Si fornisca per ognuno dei seguenti enunciati una formula del primo ordine che lo formalizza usando l'interpretazione standard sui naturali e ipotizzando che **bar** e **foo** siano due array con dominio rispettivamente $[0, n)$ e $[0, m)$:

1. L'array **bar** ha al massimo un elemento minore di tutti gli elementi dell'array **foo**
2. Il primo elemento dell'array **foo**, se esiste, è proprio uguale al doppio della somma degli elementi pari dell'array **bar**
3. La sequenza costituita dall'array **bar** seguito dall'array **foo** è strettamente crescente.
4. Il numero di elementi dell'array **bar** che sono uguali all'elemento successivo è minore della somma degli elementi dell'array **foo** che sono uguali al doppio dell'elemento precedente
5. Ogni elemento dell'array **foo** di posizione pari è il triplo di un elemento dell'array **bar** , mentre tutti gli altri sono minori di tutti gli elementi di **bar**

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. L'array **bar** ha al massimo un elemento minore di tutti gli elementi dell'array **foo**

$$\#\{x : x \in [0, n) \mid \mathbf{bar}[x] < (\mathbf{min}\ y : y \in [0, m) \,.\, \mathbf{foo}[y])\} \leq 1$$

2. Il primo elemento dell'array **foo**, se esiste, è proprio uguale al doppio della somma degli elementi pari dell'array **bar**

$$(m > 0) \Rightarrow \mathbf{foo}[0] = 2 \times \big(\Sigma\ x : x \in [0, n) \wedge pari(\mathbf{bar}[x]) \,.\, \mathbf{bar}[x]\big)$$

3. La sequenza costituita dall'array **bar** seguito dall'array **foo** è strettamente crescente.

$$(\forall x \,.\, x \in [0, n-1) \Rightarrow \mathbf{bar}[x] < \mathbf{bar}[x+1]) \ \wedge\ (\forall x \,.\, x \in [0, m-1) \Rightarrow \mathbf{foo}[x] < \mathbf{foo}[x+1])$$
$$\wedge\ ((n > 0) \wedge (m > 0) \Rightarrow \mathbf{bar}[n-1] < \mathbf{foo}[0])$$

4. Il numero di elementi dell'array **bar** che sono uguali all'elemento successivo è minore della somma degli elementi dell'array **foo** che sono uguali al doppio dell'elemento precedente

$$\#\{i : i \in [0, n-1) \mid \mathbf{bar}[i] = \mathbf{bar}[i+1]\} < (\Sigma j : j \in (0, m) \wedge \mathbf{foo}[j] = 2 * \mathbf{foo}[j-1] \,.\, \mathbf{foo}[j])$$

5. Ogni elemento dell'array **foo** di posizione pari è il triplo di un elemento dell'array **bar** , mentre tutti gli altri sono minori di tutti gli elementi di **bar**

$$\big(\forall x \,.\, x \in [0,m) \;\Rightarrow\; (pari(x) \;\Rightarrow\; (\exists y \,.\, y \in [0,n) \wedge \mathbf{foo}[x] = 3 * \mathbf{bar}[y])) \wedge \\ (dispari(x) \;\Rightarrow\; (\forall y \,.\, y \in [0,n) \;\Rightarrow\; \mathbf{foo}[x] < \mathbf{bar}[y]))\big)$$

ESERCIZIO 2 Si consideri il seguente array **a** con dominio $[0, 4)$:

7	6	11	4

Si dimostri, utilizzando più volte la legge dell'intervallo per la sommatoria, la validità della seguente formula:

$$m = (\Sigma x \,:\, x \in [0,4) \wedge pari(\mathbf{a}[x]) \,.\, (\mathbf{a}[x]-1)^2) \qquad \equiv \qquad m = 34$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

$$\begin{aligned}
& m = (\Sigma x \,:\, x \in [0,3] \wedge pari(\mathbf{a}[x]) \,.\, (\mathbf{a}[x]-1)^2) \\
\equiv \quad & \{(\text{Intervallo-}\Sigma),\ pari(\mathbf{a}[3])\} \\
& m = (\Sigma x \,:\, x \in [0,2] \wedge pari(\mathbf{a}[x]) \,.\, (\mathbf{a}[x]-1)^2) + 9 \\
\equiv \quad & \{(\text{Intervallo-}\Sigma),\ \neg pari(\mathbf{a}[2])\} \\
& m = (\Sigma x \,:\, x \in [0,1] \wedge pari(\mathbf{a}[x]) \,.\, (\mathbf{a}[x]-1)^2) + 9 \\
\equiv \quad & \{(\text{Intervallo-}\Sigma),\ pari(\mathbf{a}[1])\} \\
& m = (\Sigma x \,:\, x \in [0,0] \wedge pari(\mathbf{a}[x]) \,.\, (\mathbf{a}[x]-1)^2) + 9 + 25 \\
\equiv \quad & \{(\text{Intervallo-}\Sigma),\ \neg pari(\mathbf{a}[0])\} \\
& m = (\Sigma x \,:\, x \in [0,0) \wedge pari(\mathbf{a}[x]) \,.\, (\mathbf{a}[x]-1)^2) + 34 \\
\equiv \quad & \{(\Sigma\text{-vuoto})\} \\
& m = 34
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 3 Si consideri il seguente array **a** con dominio $[0, 5)$:

5	2	4	0	3

Si spieghi a parole cosa calcola la seguente formula e si dica quanto vale k:

$$k = (\Sigma x \,:\, x \in [0,5) \wedge (\mathbf{a}[x] \in [0,5) \Rightarrow pari(\mathbf{a}[\mathbf{a}[x]])) \,.\, x)$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

La formula dice che k è la somma degli indici degli elementi di **a** che se contengono un valore del dominio di **a** allora l'elemento in quella posizione è un numero pari. Quindi $k = 0 + 1 + 4 = 5$. Formalmente abbiamo che

$$\begin{aligned}
& k = (\Sigma x \,:\, x \in [0,5) \wedge (\mathbf{a}[x] \in [0,5) \Rightarrow pari(\mathbf{a}[\mathbf{a}[x]])) \,.\, x) \\
\equiv \quad & \{(\text{Intervallo-}\Sigma),\ \mathbf{a}[4] = 3 \in [0,5) \wedge pari(\mathbf{a}[3]),\ \text{quindi l'implicazione è vera per } x \mapsto 4\} \\
& k = (\Sigma x \,:\, x \in [0,4) \wedge (\mathbf{a}[x] \in [0,5) \Rightarrow pari(\mathbf{a}[\mathbf{a}[x]])) \,.\, x) + 4 \\
\equiv \quad & \{(\text{Intervallo-}\Sigma),\ \mathbf{a}[3] = 0 \in [0,5) \wedge \neg pari(\mathbf{a}[0]),\ \text{quindi l'implicazione è falsa per } x \mapsto 3\}
\end{aligned}$$

$k = (\Sigma x \, : \, x \in [0,3) \wedge (\mathbf{a}[x] \in [0,5) \Rightarrow \mathit{pari}(\mathbf{a}[\mathbf{a}[x]])) . \, x) + 4$

$\equiv$ $\{$(Intervallo-Σ), $\mathbf{a}[2] = 4 \in [0,5) \wedge \neg \mathit{pari}(\mathbf{a}[4])\}$

$k = (\Sigma x \, : \, x \in [0,2) \wedge (\mathbf{a}[x] \in [0,5) \Rightarrow \mathit{pari}(\mathbf{a}[\mathbf{a}[x]])) . \, x) + 4$

$\equiv$ $\{$(Intervallo-Σ), $\mathbf{a}[1] = 2 \in [0,5) \wedge \mathit{pari}(\mathbf{a}[2])\}$

$k = (\Sigma x \, : \, x \in [0,1) \wedge (\mathbf{a}[x] \in [0,5) \Rightarrow \mathit{pari}(\mathbf{a}[\mathbf{a}[x]])) . \, x) + 4 + 1$

$\equiv$ $\{$(Intervallo-Σ), $\neg \mathbf{a}[0] \in [0,5)$, quindi l'implicazione è vera per $x \mapsto 0\}$

$k = (\Sigma x \, : \, x \in [0,0) \wedge (\mathbf{a}[x] \in [0,5) \Rightarrow \mathit{pari}(\mathbf{a}[\mathbf{a}[x]])) . \, x) + 0 + 4 + 1$

$\equiv$ $\{$(Σ-vuoto)$\}$

$k = 5$

ESERCIZIO 4 Dimostrare la seguente formula usando le ipotesi non tautologiche e la legge dell'intervallo per la sommatoria:

$$m = \big(\Sigma y : y \in [0,z) \, . \, a[y]\big) + 2 * \big(\Sigma y : y \in [0,z) \, . \, y\big) \;\Rightarrow \\ m + a[z] + 2 * z = \big(\Sigma y : y \in [0,z] \, . \, a[y]\big) + 2 * \big(\Sigma y : y \in [0,z] \, . \, y\big)$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4
Per dimostrare l'implicazione partiamo dalla conseguenza usando la premessa come ipotesi non tautologica:

$m + a[z] + 2 * z = \underline{\big(\Sigma y : y \in [0,z] \, . \, a[y]\big)} + 2 * \big(\Sigma y : y \in [0,z] \, . \, y\big)$

$\equiv$ $\{$(Intervallo-Σ)$\}$

$m + a[z] + 2 * z = \big(\Sigma y : y \in [0,z) \, . \, a[y]\big) + a[z] + 2 * \big(\Sigma y : y \in [0,z] \, . \, y\big)$

$\equiv$ $\{$calcolo$\}$

$m + 2 * z = \big(\Sigma y : y \in [0,z) \, . \, a[y]\big) + 2 * \underline{\big(\Sigma y : y \in [0,z] \, . \, y\big)}$

$\equiv$ $\{$(Intervallo-Σ)$\}$

$m + 2 * z = \big(\Sigma y : y \in [0,z) \, . \, a[y]\big) + 2 * (\big(\Sigma y : y \in [0,z) \, . \, y\big) + z)$

$\equiv$ $\{$calcolo$\}$

$m = \big(\Sigma y : y \in [0,z) \, . \, a[y]\big) + 2 * \big(\Sigma y : y \in [0,z) \, . \, y\big)$

$\equiv$ $\big\{$**Ip**: $m = \big(\Sigma y : y \in [0,z) \, . \, a[y]\big) + 2 * \big(\Sigma y : y \in [0,z) \, . \, y\big)\big\}$

T

ESERCIZIO 5 Usando le ipotesi non tautologiche e le opportune leggi dell'intervallo, dimostrare la seguente formula assumendo che gli array **a** e **b** abbiano dominio $[0,n)$ e che $x \in (0,n)$:

$$\big(\forall i \, . \, i \in [0,x) \Rightarrow \mathbf{b}[i] = \big(\Sigma j : j \in [0,i] \, . \, \mathbf{a}[j]\big)\big) \;\wedge\; \mathbf{b}[x] = \mathbf{b}[x-1] + \mathbf{a}[x] \;\Rightarrow \\ \big(\forall i \, . \, i \in [0,x] \Rightarrow \mathbf{b}[i] = \big(\Sigma j : j \in [0,i] \, . \, \mathbf{a}[j]\big)\big)$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 5
Per dimostrare l'implicazione partiamo dalla conseguenza usando la premessa come ipotesi non tautologica:

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{\big(\forall i \,.\, i \in [0,x] \Rightarrow \mathbf{b}[i] = \big(\Sigma j : j \in [0,i] \,.\, \mathbf{a}[j]\big)\big)} \\
\equiv & \{(\text{Intervallo-}\forall),\ x > 0\} \\
 & \underline{\big(\forall i \,.\, i \in [0,x) \Rightarrow \mathbf{b}[i] = \big(\Sigma j : j \in [0,i] \,.\, \mathbf{a}[j]\big)\big)} \ \wedge\ \mathbf{b}[x] = \big(\Sigma j : j \in [0,x] \,.\, \mathbf{a}[j]\big) \\
\equiv & \big\{\textbf{Ip: } \big(\forall i \,.\, i \in [0,x) \Rightarrow \mathbf{b}[i] = \big(\Sigma j : j \in [0,i] \,.\, \mathbf{a}[j]\big)\big),\ (\text{Unità})\big\} \\
 & \underline{\mathbf{b}[x]} = \big(\Sigma j : j \in [0,x] \,.\, \mathbf{a}[j]\big) \\
\equiv & \{\textbf{Ip: } \mathbf{b}[x] = \mathbf{b}[x-1] + \mathbf{a}[x]\} \\
 & \mathbf{b}[x-1] + \mathbf{a}[x] = \underline{\big(\Sigma j : j \in [0,x] \,.\, \mathbf{a}[j]\big)} \\
\equiv & \{(\text{Intervallo-}\Sigma)\} \\
 & \mathbf{b}[x-1] + \mathbf{a}[x] = \big(\Sigma j : j \in [0,x) \,.\, \mathbf{a}[j]\big) + \mathbf{a}[x] \\
\equiv & \{\text{calcolo}\} \\
 & \underline{\mathbf{b}[x-1]} = \big(\Sigma j : j \in [0,x) \,.\, \mathbf{a}[j]\big) \\
\equiv & \big\{\textbf{Ip: } \big(\forall i \,.\, i \in [0,x) \Rightarrow \mathbf{b}[i] = \big(\Sigma j : j \in [0,i] \,.\, \mathbf{a}[j]\big)\big),\ (\text{Elim-}\forall),\ x > 0 \text{ e quindi } x-1 \in [0,x)\big\} \\
 & \mathbf{T}
\end{array}
$$