LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE – a.a. 2017/18

Quarta esercitazione 14-15 novembre 2017– Soluzioni Proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1
Assumendo che P, Q e R contengano la variabile libera x, si provi che la seguente formula è valida, utilizzando la regola della **Skolemizzazione**

$$(\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg(\exists x.\neg(R(x) \Rightarrow \neg Q(x))) \wedge (\exists x.P(x)) \;\Rightarrow\; (\exists x.\neg(Q(x) \Rightarrow R(x)))$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1
Utilizzando la regola della **Skolemizzazione** (si veda la Tabella delle Leggi pubblicata sul sito) è sufficiente dimostrare che

$$(\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg(\exists x.\neg(R(x) \Rightarrow \neg Q(x))) \wedge (\exists x.P(x)) \wedge P(a) \;\Rightarrow\; (\exists x.\neg(Q(x) \Rightarrow R(x))$$

con a costante nuova. Intuitivamente, è come chiamare a un elemento del dominio che testimonia la verità di $(\exists x.P(x))$. Usiamo $P(a)$ per denotare $P(x)[a/x]$ cioè la formula $P(x)$ dove x è sostituita con a. Partiamo allora dalla premessa:

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg(\exists x.\neg(R(x) \Rightarrow \neg Q(x))) \wedge \underline{(\exists x.P(x)) \wedge P(a)} \\
\Rightarrow & \{(\text{sempl-}\wedge), \text{ occ. pos.}\} \\
 & \underline{(\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x))} \wedge \neg(\exists x.\neg(R(x) \Rightarrow \neg Q(x))) \wedge P(a) \\
\Rightarrow & \{(\text{elim-}\forall), \text{ occ. pos.}\} \\
 & \underline{(P(a) \Rightarrow Q(a))} \wedge \neg(\exists x.\neg(R(x) \Rightarrow \neg Q(x))) \wedge \underline{P(a)} \\
\Rightarrow & \{(\text{Modus Ponens}), \text{ occ. pos.}\} \\
 & Q(a) \wedge \underline{\neg(\exists x.\neg(R(x) \Rightarrow \neg Q(x)))} \\
\equiv & \{(\text{De Morgan}), (\text{Doppia Negazione})\} \\
 & Q(a) \;\wedge\; \underline{(\forall x.R(x) \Rightarrow \neg Q(x))} \\
\Rightarrow & \{(\text{elim-}\forall), \text{ occ. pos.}\} \\
 & Q(a) \;\wedge\; \underline{(R(a) \Rightarrow \neg Q(a))} \\
\equiv & \{(\text{elim-} \Rightarrow)\} \\
 & Q(a) \wedge (\neg R(a) \vee \neg Q(a)) \\
\equiv & \{(\text{complemento})\} \\
 & Q(a) \wedge \neg R(a) \\
\equiv & \{(\neg\text{-} \Rightarrow), \text{ al contrario}\} \\
 & \underline{\neg(Q(a) \;\Rightarrow\; R(a))} \\
\Rightarrow & \{(\text{intro-}\exists), \text{ occ. pos.}\} \\
 & (\exists x.\neg(Q(x) \Rightarrow R(x))
\end{array}
$$

ESERCIZIO 2
Si dimostri che le seguenti formule del primo ordine sono valide:

1. $\neg(\exists x.P(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow (\forall x.\neg R(x) \Rightarrow Q(x))$
2. $(\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \Rightarrow \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x))$
3. $\big(\forall x\,.\,\neg(B(x) \Rightarrow \neg A(x))\big) \vee \neg\big(\exists x\,.\,A(x) \vee (\neg B(x) \Rightarrow A(x))\big) \;\Rightarrow\; (\forall x\,.\,A(x) \Rightarrow B(x))$
4. $(\exists x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x.\neg(P(x) \vee Q(x))) \Rightarrow (\exists x.Q(x) \vee R(x) \Rightarrow \neg P(x))$
5. $(\exists x\,.\,(\forall y\,.\,P)) \;\Rightarrow\; (\forall y\,.\,(\exists x\,.\,P))$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

1. Per dimostrare la formula partiamo dalla premessa:

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{\neg(\exists x.P(x) \wedge \neg Q(x))} \wedge (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & (\forall x.\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \\
\equiv & \quad \{(\forall : \wedge)\} \\
 & (\forall x.\underline{(\neg P(x) \vee Q(x))} \wedge (\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow), \text{ al contrario}\} \\
 & (\forall x\,.\,\underline{(\neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)) \wedge (\neg P(x) \Rightarrow R(x)})) \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{transitività}), \text{ occ. pos.}\} \\
 & (\forall x\,.\,\underline{\neg Q(x) \Rightarrow R(x)}) \\
\equiv & \quad \{(\text{contropositiva})\} \\
 & (\forall x\,.\,\neg R(x) \Rightarrow Q(x))
\end{array}
$$

   Otteniamo cioè la conclusione.

2. Dobbiamo dimostrare che

$$(\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \Rightarrow \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x))$$

   Usando la regola della **(Skolemizzazione-$\Rightarrow$)**, è sufficiente dimostrare che

$$(\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \wedge \neg S(a) \wedge R(a) \Rightarrow \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x))$$

   dove a è una costante nuova.

Parto dalla premessa:

$$(\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \underline{(\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \wedge \neg S(a)} \wedge R(a)$$

$\Rightarrow$ $\{$(sempl-$\wedge$), occ. pos.$\}$

$$\underline{(\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x))} \wedge \neg S(a) \wedge R(a)$$

$\Rightarrow$ $\{$(elim-$\forall$), occ. pos.$\}$

$$\underline{(R(a) \Rightarrow Q(a))} \wedge \neg S(a) \wedge \underline{R(a)}$$

$\Rightarrow$ $\{$(Modus Ponens), occ.pos. $\}$

$$\underline{Q(a) \wedge \neg S(a)}$$

$\Rightarrow$ $\{$(intro-$\exists$), occ.pos.$\}$

$$\underline{(\exists x \,.\, Q(x) \wedge \neg S(x))}$$

$\equiv$ $\{$(Doppia negazione),(De Morgan)$\}$

$$\neg(\forall x \,.\, \underline{\neg(Q(x) \wedge \neg S(x))})$$

$\equiv$ $\{$($\neg$-$\Rightarrow$) al contrario, (Doppia negazione)$\}$

$$\neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x))$$

Otteniamo cioè la conclusione.

3. Per dimostrare la formula partiamo dalla premessa:

$$\big(\forall x \,.\, \neg(B(x) \Rightarrow \neg A(x))\big) \vee \underline{\neg\big(\exists x \,.\, A(x) \vee (\neg B(x) \Rightarrow A(x))\big)}$$

$\equiv$ $\{$(De Morgan)$\}$

$$\big(\forall x \,.\, \underline{\neg(B(x) \Rightarrow \neg A(x))}\big) \vee \big(\forall x \,.\, \neg A(x) \wedge \underline{\neg(\neg B(x) \Rightarrow A(x))}\big)$$

$\equiv$ $\{$($\neg - \Rightarrow$), due volte$\}$

$$\big(\underline{\forall x \,.\, (B(x) \wedge A(x))\big) \vee \big(\forall x \,.\, \neg A(x) \wedge (\neg B(x) \wedge \neg A(x))}\big)$$

$\Rightarrow$ $\{$($\forall : \vee$), (idempotenza), occ. pos. $\}$

$$\big(\forall x \,.\, (\underline{B(x) \wedge A(x)}) \vee (\underline{\neg A(x) \wedge \neg B(x)})\big)$$

$\Rightarrow$ $\{$(sempl-$\wedge$) due volte, occ. pos. $\}$

$$\big(\forall x \,.\, \underline{B(x) \vee \neg A(x)}\big)$$

$\equiv$ $\{$(elim-$\Rightarrow$)$\}$

$$\big(\forall x \,.\, A(x) \Rightarrow B(x)\big)$$

Arriviamo cioè alla conclusione desiderata.

4. Dobbiamo dimostrare che

$$(\exists x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x.\neg(P(x) \vee Q(x))) \Rightarrow (\exists x.Q(x) \vee R(x) \Rightarrow \neg P(x))$$

Per la regola **(Skolemizzazione-⇒)** è sufficiente dimostrare allora che

$$(\exists x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (R(a) \Rightarrow Q(a)) \wedge (\forall x.\neg(P(x) \vee Q(x))) \Rightarrow (\exists x.Q(x) \vee R(x) \Rightarrow \neg P(x))$$

con a nuova costante. Partiamo dalla premessa:

$\underline{(\exists x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (R(a) \Rightarrow Q(a))} \wedge (\forall x.\neg(P(x) \vee Q(x)))$

$\Rightarrow$ {(sempl-∧), occ. pos.}

$(\underline{R(a) \Rightarrow Q(a)}) \wedge \underline{(\forall x.\neg(P(x) \vee Q(x)))}$

$\Rightarrow$ {(elim-⇒), (elim-∀), occ. pos.}

$(\neg R(a) \vee Q(a)) \wedge \underline{\neg(P(a) \vee Q(a))}$

$\equiv$ {(De Morgan)}

$\underline{(\neg R(a) \vee Q(a)) \wedge \neg Q(a)} \wedge \neg P(a)$

$\equiv$ {(complemento)}

$\underline{\neg R(a) \wedge \neg Q(a) \wedge \neg P(a)}$

$\Rightarrow$ {(sempl-∧), occ.pos.}

$\underline{\neg Q(a) \wedge \neg R(a)}$

$\Rightarrow$ {(De Morgan), (intro-∨), occ. pos.}

$\underline{\neg(Q(a) \vee R(a)) \vee \neg P(a)}$

$\equiv$ {(elim-⇒)}

$\underline{Q(a) \vee R(a) \Rightarrow \neg P(a)}$

$\Rightarrow$ {(intro-∃), occ.pos.}

$(\exists x.Q(x) \vee R(x) \Rightarrow \neg P(x))$

5. Per dimostrare $(\exists x\,.\,(\forall y\,.\,P)) \;\Rightarrow\; (\forall y\,.\,(\exists x.P))$, per la regola della **(Skolemizzazione-⇒)** è sufficiente dimostrare:

$(\exists x\,.\,(\forall y\,.\,P)) \wedge (\forall y\,.\,P)[^a/_x] \;\Rightarrow\; (\forall y\,.\,(\exists x.P))$

Notiamo che x è diversa da y e quindi $(\forall y\,.\,P)[^a/_x]$ è equivalente a $(\forall y\,.\,P[^a/_x])$. Quindi, abbiamo

$\underline{(\exists x\,.\,(\forall y\,.\,P)) \wedge (\forall y\,.\,P[^a/_x])}$

$\Rightarrow$ {(sempl-∧), occ. pos.}

$(\forall y\,.\,\underline{P[^a/_x]})$

$\Rightarrow \qquad \{(\text{intro-}\exists), \text{ occ. pos.}\}$

$\quad (\forall y\,.\,(\exists x\,.\,P))$

Alternativamente, per la regola della **(Generalizzazione-$\Rightarrow$)** è sufficiente dimostrare $(\exists x\,.\,(\forall y\,.\,P)) \Rightarrow (\exists x\,.\,P[^a/_y])$, dove a è una nuova costante. Ma questa formula è banalmente valida poiché è ottenibile della legge (elim-$\forall$) applicata ad un'occorrenza positiva.

ESERCIZIO 3
Dimostrare che le seguenti formule **non sono valide**:

1. $(\forall x\,.\,P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x\,.\,Q(x)) \;\Rightarrow\; (\exists x\,.\,P(x))$

2. $(\forall x\,.\,P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x\,.\,P(x)) \;\Rightarrow\; (\exists x\,.\,Q(x))$

3. $(\forall y\,.\,(\exists x.P)) \;\Rightarrow\; (\exists x\,.\,(\forall y\,.\,P))$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3
Per dimostrare che una formula non è valida è sufficiente presentare un'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ che la rende falsa.

1. Per rendere falsa l'implicazione

$$\Phi = (\forall x\,.\,P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x\,.\,Q(x)) \;\Rightarrow\; (\exists x\,.\,P(x))$$

   la conseguenza deve essere falsa mentre la premessa deve essere vera. Quindi

   - P deve essere interpretato come una proprietà falsa per tutti gli elementi del dominio, cioè $\mathcal{I}_\rho[^d/_x](P(x)) = \mathbf{F}$ per ogni $d \in D$;
   - Q deve essere una proprietà vera per almeno un elemento del dominio, e l'implicazione $P \Rightarrow Q$ deve valere per tutti gli elementi di D.

   Consideriamo allora l'interpretazione $I\mathcal{I}_\mathbb{N} = (\mathbb{N}, \alpha)$ dove $\mathbb{N}$ è l'inisieme dei naturali, e

   - $\alpha(P)(n) = \mathbf{T}$ se e solo se n è un numero sia pari che dispari
   - $\alpha(Q)(n) = \mathbf{T}$ se e solo se n è un numero pari

   Si lascia al lettore il facile compito di verificare che $\mathcal{I}_{\mathbb{N}\rho}(\Phi) = \mathbf{F}$ per qualunque ρ.

2. Si consideri l'interpretazione $\mathcal{I}_\emptyset = (\emptyset, \alpha)$. Essendo il dominio vuoto, ogni formula quantificata universalmente è vera nell'interpretazione, mentre ogni formula quantificata esistenzialmente è falsa. Quindi qualunque sia l'interpretazione dei simboli di predicato P e Q abbiamo che $\mathcal{I}_{\emptyset\rho}((\forall x\,.\,P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x\,.\,Q(x))) = \mathbf{T}$ e $\mathcal{I}_{\emptyset\rho}((\exists x\,.\,Q(x))) = \mathbf{F}$. Di conseguenza per la semantica dell'implicazione la formula è falsa.

3. Per rendere falsa la formula possiamo considerare una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ dove $\mathcal{D}$ è l'insieme delle persone e $\alpha(P)(n, m) = \mathbf{T}$ se e solo se n è padre di m.

   Quindi abbiamo che $\mathcal{I}_\rho((\forall y\,.\,(\exists x.P(x, y))) = \mathbf{T}$ e $\mathcal{I}_\rho((\exists x\,.\,(\forall y\,.\,P(x, y))) = \mathbf{F}$s. Di conseguenza per la semantica dell'implicazione la formula è falsa.

ESERCIZIO 4
Dimostrare in modo formale che delle seguenti formule una è valida e l'altra no.

1. $(\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge (\neg(\exists x.R(x)) \vee (\forall x.Q(x))) \Rightarrow (\forall x.Q(x) \vee P(x))$

2. $(\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge (\neg(\exists x.R(x)) \vee (\forall x.Q(x))) \Rightarrow (\forall x.Q(x) \vee R(x))$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4
Le due formule hanno la stessa premessa, pertanto partiamo da essa e semplifichiamo:

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge (\neg(\exists x.R(x)) \vee (\forall x.Q(x))) \\
\equiv & \{(\text{De Morgan})\} \\
 & (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge ((\forall x.\neg R(x)) \vee (\forall x.Q(x))) \\
\Rightarrow & \{(\forall{:}\vee), \text{ occ. pos.}\} \\
 & (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge (\forall x.\neg R(x) \vee Q(x)) \\
\equiv & \{(\forall{:}\wedge), (\text{elim-}\Rightarrow)\} \\
 & (\forall x.(P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg R(x) \vee Q(x)))
\end{array}
$$

Quindi ci siamo ridotti a considerare le due formule seguenti:

1. $\Phi_1 = (\forall x.(P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg R(x) \vee Q(x))) \Rightarrow (\forall x.Q(x) \vee P(x))$

2. $\Phi_2 = (\forall x.(P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg R(x) \vee Q(x))) \Rightarrow (\forall x.Q(x) \vee R(x))$

La formula Φ_1 è valida, come si vede dall'applicazione del Principio di Risoluzione:

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x.(P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg R(x) \vee Q(x))) \\
\Rightarrow & \{(\text{risoluzione}), \text{ occ. pos. }\} \\
 & (\forall x.P(x) \vee Q(x))
\end{array}
$$

Quindi, per come è formulato il testo dell'esercizio, la formula Φ_2 non è valida: dobbiamo fornire un'interpretazione che la rende falsa. Un controesempio può essere costituito da un dominio in cui Q e R sono proprietà false per tutti gli elementi (rendendo falsa la conseguenza), mentre P è vera per tutti gli elementi (e quindi la premessa diventa vera, considerando che la proprietà $\neg R$ è anch'essa vera per tutti gli elementi). Consideriamo allora l'interpretazione $\mathcal{I}_{\mathbb{N}} = (\mathbb{N}, \alpha)$ dove $\mathbb{N}$ è l'inisieme dei naturali, e

- $\alpha(P)(n) = T$ se e solo se $n \geq 0$
- $\alpha(Q)(n) = T$ se e solo se $n < 0$
- $\alpha(R)(n) = T$ se e solo se $n < 0$

Si lascia al lettore il facile compito di verificare che $\mathcal{I}_{\mathbb{N}\rho}(\Phi_2) = F$ per qualunque assegnamento ρ.