LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE – a.a. 2016/17
Quarta esercitazione — 15/11/2016 — Soluzioni Proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1
Assumendo che P, Q e R contengano la variabile libera x, si provi che la seguente formula è valida, utilizzando la regola della **Skolemizzazione**

$$(\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg(\exists x.\neg(R(x) \Rightarrow \neg Q(x))) \wedge (\exists x.P(x)) \;\Rightarrow\; (\exists x.\neg(Q(x) \Rightarrow R(x)))$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1
Utilizzando la regola della **Skolemizzazione** (si veda la Tabella delle Leggi pubblicata sul sito) è sufficiente dimostrare che

$$(\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg(\exists x.\neg(R(x) \Rightarrow \neg Q(x))) \wedge (\exists x.P(x)) \wedge P(a) \;\Rightarrow\; (\exists x.\neg(Q(x) \Rightarrow R(x))$$

con a costante nuova. Intuitivamente, è come chiamare a un elemento del dominio che testimonia la verità di $(\exists x.P(x))$. Usiamo $P(a)$ per denotare $P(x)[a/x]$ cioè la formula $P(x)$ dove x è sostituita con a. Partiamo allora dalla premessa:

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg(\exists x.\neg(R(x) \Rightarrow \neg Q(x))) \wedge (\exists x.P(x)) \wedge P(a) \\
\Rightarrow & \{(\text{sempl-}\wedge),\ \text{occ. pos.}\} \\
 & (\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg(\exists x.\neg(R(x) \Rightarrow \neg Q(x))) \wedge P(a) \\
\Rightarrow & \{(\text{elim-}\forall),\ \text{occ. pos.}\} \\
 & (P(a) \Rightarrow Q(a)) \wedge \neg(\exists x.\neg(R(x) \Rightarrow \neg Q(x))) \wedge P(a) \\
\Rightarrow & \{(\text{Modus Ponens}),\ \text{occ. pos.}\} \\
 & Q(a) \wedge \neg(\exists x.\neg(R(x) \Rightarrow \neg Q(x))) \\
\equiv & \{(\text{De Morgan}),\ (\text{Doppia Negazione})\} \\
 & Q(a) \wedge (\forall x.R(x) \Rightarrow \neg Q(x)) \\
\Rightarrow & \{(\text{elim-}\forall),\ \text{occ. pos.}\} \\
 & Q(a) \wedge (R(a) \Rightarrow \neg Q(a)) \\
\equiv & \{(\text{elim-} \Rightarrow)\} \\
 & Q(a) \wedge (\neg R(a) \vee \neg Q(a)) \\
\equiv & \{(\text{complemento})\} \\
 & Q(a) \wedge \neg R(a) \\
\equiv & \{(\neg\text{-} \Rightarrow)\} \\
 & \neg(Q(a) \;\Rightarrow\; R(a)) \\
\Rightarrow & \{(\text{intro-}\exists),\ \text{occ. pos.}\} \\
 & (\exists x.\neg(Q(x) \Rightarrow R(x))
\end{array}
$$

ESERCIZIO 2

Si dimostri che le seguenti formule del primo ordine sono valide:

1. $\neg(\exists x.P(x) \land \neg Q(x)) \land (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow (\forall x.\neg R(x) \Rightarrow Q(x))$
2. $(\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \land (\exists x.\neg S(x) \land R(x)) \Rightarrow \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x))$
3. $\big(\forall x\,.\,\neg(B(x) \Rightarrow \neg A(x))\big) \lor \neg\big(\exists x\,.\,A(x) \lor (\neg B(x) \Rightarrow A(x))\big) \;\Rightarrow\; (\forall x\,.\,A(x) \Rightarrow B(x))$
4. $(\exists x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \land (\forall x.\neg(P(x) \lor Q(x))) \Rightarrow (\exists x.Q(x) \lor R(x) \Rightarrow \neg P(x))$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

1. Per dimostrare la formula partiamo dalla premessa:

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(\exists x.P(x) \land \neg Q(x)) \land (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \\
\equiv & \{(\text{De Morgan})\} \\
 & (\forall x.\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \\
\equiv & \{(\forall : \land)\} \\
 & (\forall x.(\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \\
\equiv & \{(\text{elim-}\Rightarrow)\} \\
 & (\forall x.(\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg\neg P(x) \lor R(x))) \\
\equiv & \{(\text{Doppia Negazione})\} \\
 & (\forall x.\underline{(\neg P(x) \lor Q(x)) \land (P(x) \lor R(x))}) \\
\Rightarrow & \{(\text{risoluzione}), \text{ occ. pos.}\} \\
 & (\forall x.Q(x) \lor R(x)) \\
\equiv & \{(\text{doppia neg.})\} \\
 & (\forall x.\neg\neg R(x) \lor Q(x)) \\
\equiv & \{(\text{elim.-}\Rightarrow \text{ al contrario})\} \\
 & (\forall x.\neg R(x) \Rightarrow Q(x))
\end{array}
$$

Otteniamo cioè la conclusione.

2. Dobbiamo dimostrare che

$$(\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \Rightarrow \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x))$$

Vediamo due possibili soluzioni.

[**Con Skolemizzazione**] Usando la regola della **(Skolemizzazione-$\Rightarrow$)**, è sufficiente dimostrare che

$$(\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \wedge \neg S(a) \wedge R(a) \Rightarrow \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x))$$

dove a è una costante nuova. Intuitivamente, è come se chiamassimo a un ipotetico elemento del dominio che testimonia la verità di $(\exists x.\neg S(x) \wedge R(x))$.

Parto allora dalla premessa:

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \wedge \neg S(a) \wedge R(a) \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{sempl-}\wedge), \text{ occ. pos.}\} \\
 & (\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg S(a) \wedge R(a) \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{elim-}\forall), \text{ occ. pos.}\} \\
 & (R(a) \Rightarrow Q(a)) \wedge \neg S(a) \wedge R(a) \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{Modus Ponens}), \text{ occ.pos. }\} \\
 & Q(a) \wedge \neg S(a) \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{Intro-}\exists)\} \\
 & (\exists x.Q(x) \wedge \neg S(x)) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & \neg(\forall x.\neg(Q(x) \wedge \neg S(x))) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & \neg(\forall x.\neg Q(x) \vee S(x))) \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow) \text{ al contrario}\} \\
 & \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x)))
\end{array}
$$

Otteniamo cioè la conclusione.

[**Con eliminazione dell'implicazione**]

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \Rightarrow \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x)) \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow)\} \\
 & \neg((\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x.\neg S(x) \wedge R(x))) \vee \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x)) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan}), \text{ due volte}\} \\
 & \neg(\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \vee \neg(\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \vee (\exists x.\neg(Q(x) \Rightarrow S(x))) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan}) \text{ due volte}, (\neg - \Rightarrow)\}
\end{array}
$$

$$(\exists x.\neg(R(x) \Rightarrow Q(x))) \vee (\forall x.\neg(\neg S(x) \wedge R(x))) \vee (\exists x.Q(x) \wedge \neg S(x))$$

$$\equiv \quad \{(\text{De Morgan}), (\neg\!- \Rightarrow)\}$$

$$(\exists x.R(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\forall x.S(x) \vee \neg R(x))) \vee (\exists x.Q(x) \wedge \neg S(x))$$

$$\equiv \quad \{(\text{commutatività}), (\exists : \vee)\}$$

$$(\exists x.(R(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (Q(x) \wedge \neg S(x))) \vee (\forall x.S(x) \vee \neg R(x))$$

$$\equiv \quad \{(\text{Doppia negazione}), (\text{De Morgan})\}$$

$$\neg(\forall x.\neg\big((R(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (Q(x) \wedge \neg S(x))\big)) \vee (\forall x.S(x) \vee \neg R(x))$$

$$\equiv \quad \{(\text{De Morgan})\}$$

$$\neg(\forall x.(\neg R(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(x) \vee S(x))) \vee (\forall x.S(x) \vee \neg R(x))$$

$$\Leftarrow \quad \{(\text{risoluzione}), \text{ con occ. negativa}\}$$

$$\neg(\forall x.\neg R(x) \vee S(x)) \vee (\forall x.S(x) \vee \neg R(x))$$

$$\equiv \quad \{(\text{terzo escluso})\}$$

$$\mathbf{T}$$

Abbiamo dimostrato che la formula è valida perché è implicata da **T**.

3. Per dimostrare la formula partiamo dalla premessa:

$$\big(\forall x\,.\,\neg(B(x) \Rightarrow \neg A(x))\big) \vee \neg\big(\exists x\,.\,A(x) \vee (\neg B(x) \Rightarrow A(x))\big)$$

$$\equiv \quad \{(\text{De Morgan})\}$$

$$\big(\forall x\,.\,\neg(B(x) \Rightarrow \neg A(x))\big) \vee \big(\forall x\,.\,\neg A(x) \wedge \neg(\neg B(x) \Rightarrow A(x))\big)$$

$$\equiv \quad \{(\neg\!- \Rightarrow), \text{ due volte}\}$$

$$\big(\forall x\,.\,(B(x) \wedge A(x))\big) \vee \big(\forall x\,.\,\neg A(x) \wedge (\neg B(x) \wedge \neg A(x))\big)$$

$$\Rightarrow \quad \{(\forall : \vee), (\text{idempotenza}), \text{ occ. pos. }\}$$

$$\big(\forall x\,.\,(B(x) \wedge A(x)) \vee (\neg A(x) \wedge \neg B(x))\big)$$

$$\Rightarrow \quad \{(\text{sempl-}\wedge) \text{ due volte, occ. pos. }\}$$

$$\big(\forall x\,.\,B(x) \vee \neg A(x)\big)$$

$$\equiv \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow)\}$$

$$\big(\forall x\,.\,A(x) \Rightarrow B(x)\big)$$

Arriviamo cioè alla conclusione desiderata.

4. Dobbiamo dimostrare che

$$(\exists x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x.\neg(P(x) \vee Q(x))) \Rightarrow (\exists x.Q(x) \vee R(x) \Rightarrow \neg P(x))$$

Per la regola **(Skolemizzazione-⇒)** è sufficiente dimostrare allora che

$$(\exists x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (R(a) \Rightarrow Q(a)) \wedge (\forall x.\neg(P(x) \vee Q(x))) \Rightarrow (\exists x.Q(x) \vee R(x) \Rightarrow \neg P(x))$$

con a nuova costante. Partiamo dalla premessa:

$$\begin{array}{ll}
 & (\exists x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (R(a) \Rightarrow Q(a)) \wedge (\forall x.\neg(P(x) \vee Q(x))) \\
\Rightarrow & \{\text{(sempl-}\wedge\text{), occ. pos.}\} \\
 & (R(a) \Rightarrow Q(a)) \wedge (\forall x.\neg(P(x) \vee Q(x))) \\
\Rightarrow & \{\text{(elim-}\Rightarrow\text{), (elim-}\forall\text{), occ. pos.}\} \\
 & (\neg R(a) \vee Q(a)) \wedge \neg(P(a) \vee Q(a)) \\
\equiv & \{\text{(De Morgan)}\} \\
 & (\neg R(a) \vee Q(a)) \wedge \neg Q(a) \wedge \neg P(a) \\
\equiv & \{\text{(complemento)}\} \\
 & \neg R(a) \wedge \neg Q(a) \wedge \neg P(a) \\
\Rightarrow & \{\text{(sempl-}\wedge\text{), occ.pos.}\} \\
 & \neg Q(a) \wedge \neg R(a) \\
\Rightarrow & \{\text{(De Morgan), (intro-}\vee\text{), occ. pos.}\} \\
 & \neg(Q(a) \vee R(a)) \vee \neg P(a) \\
\equiv & \{\text{(elim-}\Rightarrow\text{)}\} \\
 & Q(a) \vee R(a) \Rightarrow \neg P(a) \\
\Rightarrow & \{\text{(intro-}\exists\text{, occ.pos.)}\} \\
 & (\exists x.Q(x) \vee R(x) \Rightarrow \neg P(x))
\end{array}$$

ESERCIZIO 3

Dimostrare che le seguenti formule **non sono valide**:

1. $(\forall x \,.\, P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x \,.\, Q(x)) \;\Rightarrow\; (\exists x \,.\, P(x))$

2. $(\forall x \,.\, P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x \,.\, P(x)) \;\Rightarrow\; (\exists x \,.\, Q(x))$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3
Per dimostrare che una formula non è valida è sufficiente presentare un'interpretazione $I = (D, \alpha)$ che la rende falsa.

1. Per rendere falsa l'implicazione

$$\Phi = \big((\forall x\,.\,P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x\,.\,Q(x)) \;\Rightarrow\; (\exists x\,.\,P(x))\big)$$

   la conseguenza deve essere falsa (quindi P deve essere interpretato come una proprietà falsa per tutti gli elementi del dominio, cioè $I_\rho[^d/_x](P(x)) = F$ per ogni $d \in D$), mentre la premessa deve essere vera (quindi Q deve essere una proprietà vera per almeno un elemento del dominio, e l'implicazione $P \Rightarrow Q$ deve valere per tutti gli elementi di D). Consideriamo allora l'interpretazione $I_{\mathbb{N}} = (\mathbb{N}, \alpha)$ dove $\mathbb{N}$ è l'inisieme dei naturali, e

   - $\alpha(P)(n) = T$ se e solo se n è un numero sia pari che dispari
   - $\alpha(Q)(n) = T$ se e solo se n è un numero pari

   Si lascia al lettore il facile compito di verificare che $I_{\mathbb{N}\rho}(\Phi) = F$ per qualunque ρ.

2. Si consideri l'interpretazione $I_\emptyset = (\emptyset, \alpha)$. Essendo il dominio vuoto, ogni formula quantificata universalmente è vera nell'interpretazione, mentre ogni formula quantificata esistenzialmente è falsa. Quindi qualunque sia l'interpretazione dei simboli di predicato P e Q abbiamo che $I_{\emptyset\rho}((\forall x\,.\,P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x\,.\,Q(x))) = T$ e $I_{\emptyset\rho}((\exists x\,.\,Q(x))) = F$, quindi per la regola (S6) l'implicazione è falsa.

ESERCIZIO 4
Dimostrare in modo formale che delle seguenti formule una è valida e l'altra no.

1. $(\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge (\neg(\exists x.R(x)) \vee (\forall x.Q(x))) \Rightarrow (\forall x.Q(x) \vee P(x))$

2. $(\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge (\neg(\exists x.R(x)) \vee (\forall x.Q(x))) \Rightarrow (\forall x.Q(x) \vee R(x))$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4
Le due formule hanno la stessa premessa, pertanto partiamo da essa e semplifichiamo:

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge (\neg(\exists x.R(x)) \vee (\forall x.Q(x))) \\
\equiv & \{(\text{De Morgan})\} \\
 & (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge ((\forall x.\neg R(x)) \vee (\forall x.Q(x))) \\
\Rightarrow & \{(\forall{:}\vee), \text{ occ. pos.}\} \\
 & (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge (\forall x.\neg R(x) \vee Q(x)) \\
\equiv & \{(\forall{:}\wedge), (\text{elim-}\Rightarrow)\} \\
 & (\forall x.(P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg R(x) \vee Q(x)))
\end{array}
$$

Quindi ci siamo ridotti a considerare le due formule seguenti:

1. $\Phi_1 = (\forall x.(P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg R(x) \vee Q(x))) \Rightarrow (\forall x.Q(x) \vee P(x))$

2. $\Phi_2 = (\forall x.(P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg R(x) \vee Q(x))) \Rightarrow (\forall x.Q(x) \vee R(x))$

La formula Φ_1 è valida, come si vede dall'applicazione del Principio di Risoluzione:

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x.(P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg R(x) \vee Q(x))) \\
\Rightarrow & \{\text{(risoluzione), occ. pos. }\} \\
 & (\forall x.P(x) \vee Q(x))
\end{array}
$$

Quindi, per come è formulato il testo dell'esercizio, la formula Φ_2 non è valida: dobbiamo fornire un'interpretazione che la rende falsa. Un controesempio può essere costituito da un dominio in cui Q e R sono proprietà false per tutti gli elementi (rendendo falsa la conseguenza), mentre P è vera per tutti gli elementi (e quindi la premessa diventa vera, considerando che la proprietà $\neg R$ è anch'essa vera per tutti gli elementi). Consideriamo allora l'interpretazione $I_{\mathbb{N}} = (\mathbb{N}, \alpha)$ dove $\mathbb{N}$ è l'inisieme dei naturali, e

- $\alpha(P)(n) = T$ se e solo se $n \geq 0$
- $\alpha(Q)(n) = T$ se e solo se $n < 0$
- $\alpha(R)(n) = T$ se e solo se $n < 0$

Si lascia al lettore il facile compito di verificare che $I_{\mathbb{N}\rho}(\Phi_2) = F$ per qualunque assegnamento ρ.