LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE – a.a. 2016/17
Seconda esercitazione - 11/10/16 - Soluzioni Proposte

1. Nei seguenti passi di dimostrazione, indicare il connettivo logico corretto da sostituire a ⍰ applicando il Principio di Sostituzione dell'Implicazione. Motivare la risposta.

   (a) $P \Rightarrow \neg(Q \wedge (R \Rightarrow S))$

   ⍰ $\{(\text{Semplificazione-}\wedge)\}$

   $P \Rightarrow \neg Q$

   (b) $(P \vee Q) \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$

   ⍰ $\{(\text{Introduzione-}\vee)\}$

   $P \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

(a) Per adoperare la legge (Semplificazione-$\wedge$): $A \wedge B \Rightarrow A$, possiamo partire dalla prima formula $P \Rightarrow \neg(Q \wedge (R \Rightarrow S))$, applicandola a $Q \wedge (R \Rightarrow S)$ (quindi usando l'istanza della legge: $Q \wedge (R \Rightarrow S) \Rightarrow Q$). Dato che la formula $Q \wedge (R \Rightarrow S)$ occorre negativamente abbiamo per il Principio di Sostituzione:

$P \Rightarrow \neg\underline{(Q \wedge (R \Rightarrow S))}$

$\Leftarrow$ $\{(\text{Semplificazione-}\wedge)$ e $(Q \wedge (R \Rightarrow S))$ occorre negativamente in $P \Rightarrow \neg(Q \wedge (R \Rightarrow S))\}$

$P \Rightarrow \neg Q$

(b) Per adoperare la legge (Introduzione-$\vee$): $A \Rightarrow A \vee B$, possiamo partire dalla seconda formula $P \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$, applicandola a P (quindi usando l'istanza della legge: $P \Rightarrow P \vee Q$). Dato che P occorre negativamente abbiamo per il Principio di Sostituzione:

$\underline{P} \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$

$\Leftarrow$ $\{(\text{Introduzione-}\vee)$ e P occorre negativamente in $P \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)\}$

$(P \vee Q) \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$

Ricordando che $a \Rightarrow b \equiv b \Leftarrow a$ otteniamo invertendo le formule del passaggio di dimostrazione precedente:

$(P \vee Q) \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$

$\Rightarrow$ $\{(\text{Introduzione-}\vee)$ e P occorre negativamente in $P \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)\}$

$\underline{P} \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$

2. Applicare la legge *Modus Ponens* alla sottoformula sottolineata della seguente formula, e scrivere per esteso la formula risultante, la giustificazione e il connettivo.

   $R \wedge \underline{(\neg P \vee Q) \wedge (Q \vee \neg P \Rightarrow R)} \Rightarrow P \wedge R$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Ricordiamo che il Modus Ponens prescrive che $(A \Rightarrow B) \land A \Rightarrow B$, e osserviamo che la premessa del Modus Ponens compare nella sottoformula sottolineata con $A \equiv \neg P \lor Q$ e $B \equiv R$ (consideriamo $\neg P \lor Q$ e $Q \lor \neg P$ uguali perché differiscono solo per commutatività della disgiunzione). Osserviamo che la formula $(\neg P \lor Q) \land (Q \lor \neg P \Rightarrow R)$ occorre negativamente nella formula $R \land (\neg P \lor Q) \land (Q \lor \neg P \Rightarrow R) \Rightarrow P \land R$. Quindi il passaggio di dimostrazione richiesto è il seguente:

$$R \land \underline{(\neg P \lor Q) \land (Q \lor \neg P \Rightarrow R)} \Rightarrow P \land R$$

$\Leftarrow$ {(Modus Ponens), occorrenza negativa}

$$R \land R \Rightarrow P \land R$$

3. Si provi che le seguenti proposizioni sono tautologie, usando dimostrazioni per sostituzione con ipotesi non tautologiche.

   (a) $(P \Rightarrow R \lor S) \land (R \Rightarrow S) \Rightarrow (P \Rightarrow S)$

   (b) $(P \lor Q \Rightarrow R \land S) \Rightarrow (P \Rightarrow S)$

   (c) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

(a) $(P \Rightarrow R \lor S) \land (R \Rightarrow S) \Rightarrow (P \Rightarrow S)$

Per dimostrare la formula (a) possiamo possiamo dimostrare la conclusione $(P \Rightarrow S)$, usando le formule $(P \Rightarrow R \lor S)$ e $(R \Rightarrow S)$ come *ipotesi non tautologiche*.

$\underline{P}$

$\Rightarrow$ { **Ip:** $(P \Rightarrow R \lor S)$ **e** P **occorre positivamente in** P}

$\underline{R} \lor S$

$\Rightarrow$ { **Ip:** $(R \Rightarrow S)$ **e** R **occorre positivamente in** R ∨ S}

$S \lor S$

$\equiv$ { (Idemp.) }

S

(b) $(P \lor Q \Rightarrow R \land S) \Rightarrow (P \Rightarrow S)$

Per dimostrare la formula (b) possiamo dimostrare la conclusione $(P \Rightarrow S)$, usando la formula $(P \lor Q \Rightarrow R \land S)$ come *ipotesi non tautologica*.

$\underline{P}$

$\Rightarrow$ { (Introduzione-$\lor$) e P occorre positivamente}

$\underline{P \lor Q}$

$\Rightarrow$ { **Ip:** $(P \lor Q \Rightarrow R \land S)$ **e** $P \lor Q$ **occorre positivamente in P ∨Q** }

$\underline{R \land S}$

$\Rightarrow$ { (Semplificazione-$\land$) e $R \land S$ occorre positivamente in $R \land S$}

S

(c) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

Per dimostrare la formula (c) si possono impostare varie i dimostrazioni. Nel seguito ne mostriamo alcune.

- Possiamo utilizzare la Legge di Sempl.-Sinistra-2: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$. Quindi abbiamo che

$$\begin{array}{ll} & (P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)) \\ \equiv & \qquad \{\text{ (Sempl.-Sinistra-2)}\} \\ & (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \end{array}$$

  A questo punto, possiamo dimostrare la conclusione $P \Rightarrow R$ usando le formule $(P \Rightarrow Q)$ e $(Q \Rightarrow R)$ come *ipotesi non tautologiche*.

$$\begin{array}{ll} & \underline{P} \\ \Rightarrow & \qquad \{\textbf{ Ip: } (P \Rightarrow Q) \textbf{ e } P \textbf{ occorre positivamente}\} \\ & \underline{Q} \\ \Rightarrow & \qquad \{\textbf{ Ip: } (Q \Rightarrow R) \textbf{ e } Q \textbf{ occorre positivamente}\} \\ & R \end{array}$$

- Possiamo applicare la legge contronominale $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$. A questo punto possiamo dimostre la formula $(Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$, usando $\neg Q \Rightarrow \neg P$ come *ipotesi non tautologica*. Per dimostrare $(Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ partiamo dalla premessa $(Q \Rightarrow R)$ per arrivare alla conclusione $(P \Rightarrow R)$.

$$\begin{array}{ll} & \underline{Q \Rightarrow R} \\ \equiv & \qquad \{(\text{Elim.-}\Rightarrow)\} \\ & \underline{\neg Q} \vee R \\ \Rightarrow & \qquad \{\textbf{ Ip: } \neg Q \Rightarrow \neg P \textbf{ e } \neg Q \textbf{ occorre positivamente in } \neg Q \vee R\} \\ & \underline{\neg P \vee R} \\ \equiv & \qquad \{(\text{Elim.-}\Rightarrow)\} \\ & P \Rightarrow R \end{array}$$

4. Si provi che le seguenti proposizioni sono tautologie, senza usare le tabelle di verità. Per ogni tautologia cercare di trovare la tecnica di dimostrazione più adeguata.

   (a) $(P \wedge Q) \wedge (\neg Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \vee R)$

   (b) $((\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg R \vee S) \Rightarrow (R \wedge \neg S \Rightarrow \neg P)$

   (c) $\neg P \wedge (R \Rightarrow \neg(P \Rightarrow Q)) \quad \Rightarrow \quad \neg R$

   (d) $\neg((\neg Q \vee P) \wedge R) \wedge (P \vee Q \Rightarrow R) \quad \Rightarrow \quad (Q \Rightarrow \neg P)$

ALCUNE SOLUZIONI ESERCIZIO 4

(a) Dimostriamo la formula partendo dalla premessa dell'implicazione $(P \wedge Q) \wedge (\neg Q \Rightarrow R)$ ed arrivando alla conclusione $(P \vee R)$:

$$
\begin{array}{ll}
& (P \wedge Q) \wedge (\underline{\neg Q \Rightarrow R}) \\
\equiv & \qquad \{(\text{Elim.-}\Rightarrow),\ (\text{Doppia Neg.})\} \\
& P \wedge \underline{Q \wedge (Q \vee R)} \\
\equiv & \qquad \{(\text{Assorb.})\} \\
& \color{blue}{\underline{P \wedge Q}} \\
\color{blue}{\Rightarrow} & \qquad \{(\text{Sempl.-}\wedge) \text{ dove } \color{blue}{P \wedge Q} \text{ occorre } \color{blue}{\text{positivamente}}\ \} \\
& \color{blue}{\underline{P}} \\
\color{blue}{\Rightarrow} & \qquad \{(\text{Intro.-}\vee) \text{ dove } \color{blue}{P} \text{ occorre } \color{blue}{\text{positivamente}}\ \} \\
& P \vee R
\end{array}
$$

(b) $((\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg R \vee S) \Rightarrow (R \wedge \neg S \Rightarrow \neg P)$

Dimostriamo la formula partendo dalla premessa dell'implicazione $(\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg R \vee S$ ed arrivando alla conclusione $R \wedge \neg S \Rightarrow \neg P$:

$$
\begin{array}{ll}
& (\underline{\neg P \Rightarrow Q}) \Rightarrow \neg R \vee S \\
\equiv & \qquad \{(\text{Elim.-}\Rightarrow) \text{ e } (\text{Doppia Negazione})\} \\
& \underline{P \vee Q \Rightarrow \neg R \vee S} \\
\equiv & \qquad \{(\text{Elim.-}\Rightarrow)\} \\
& \underline{\neg(P \vee Q)} \vee (\neg R \vee S) \\
\equiv & \qquad \{(\text{De Morgan})\} \\
& \underline{(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg R \vee S)} \\
\equiv & \qquad \{(\text{Elim.-}\Rightarrow) \text{ e } (\text{Doppia Negazione})\} \\
& \underline{\neg(\neg R \vee S)} \Rightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \\
\equiv & \qquad \{(\text{De Morgan})\} \\
& (R \wedge \neg S) \Rightarrow \color{blue}{\underline{(\neg P \wedge \neg Q)}} \\
\color{blue}{\Rightarrow} & \qquad \{(\text{Semplificazione-}\wedge) \text{ dove } \color{blue}{(\neg P \wedge \neg Q)} \text{ occorre } \color{blue}{\text{positivamente}}\} \\
& (R \wedge \neg S) \Rightarrow \neg P
\end{array}
$$

(d) Si possono sviluppare varie dimostrazioni. Ne mostriamo alcune.

- Dimostriamo la formula partendo dalla premessa $\neg((\neg Q \vee P) \wedge R) \wedge (P \vee Q \Rightarrow R)$ dell'implicazione ed arrivando alla conclusione $Q \Rightarrow \neg P$:

$$
\begin{array}{ll}
& \underline{\neg((\neg Q \vee P) \wedge R)} \wedge (P \vee Q \Rightarrow R) \\
\equiv & \qquad \{(\text{De Morgan})\} \\
& (\underline{\neg(\neg Q \vee P) \vee \neg R}) \wedge (P \vee Q \Rightarrow R) \\
\equiv & \qquad \{(\text{Elim.-}\Rightarrow), \text{ al contrario}\} \\
& \color{blue}{\underline{(R \Rightarrow \neg(\neg Q \vee P)) \wedge (P \vee Q \Rightarrow R)}} \\
\color{blue}{\Rightarrow} & \qquad \{(\text{Transit.-}\Rightarrow),\ \color{blue}{\text{occorrenza positiva}}\} \\
& \underline{P \vee Q \Rightarrow \neg(\neg Q \vee P)}
\end{array}
$$

$\equiv$ $\{$(Elim.-$\Rightarrow$)$\}$

$\underline{\neg(P \vee Q)} \vee \underline{\neg(\neg Q \vee P)}$

$\equiv$ $\{$(De Morgan), due volte$\}$

$\underline{(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)}$

$\equiv$ $\{$(Distributiva)$\}$

$\neg P \wedge (\underline{\neg Q \vee Q})$

$\equiv$ $\{$(Terzo Escluso)$\}$

$\underline{\neg P \wedge \mathbf{T}}$

$\equiv$ $\{$(Unità)$\}$

$\underline{\neg P}$

$\Rightarrow$ $\{$(Introduzione-$\vee$) e $\neg P$ occorre positivamente$\}$

$\underline{\neg P \vee \neg Q}$

$\equiv$ $\{$(Elim.-$\Rightarrow$), al contrario$\}$

$Q \Rightarrow \neg P$

- Alternativamente possiamo sviluppare una dimostrazione usando le *ipotesi non tautologiche*. Cominciamo col semplificare la premessa:

$\neg((\neg Q \vee P) \wedge R) \wedge (P \vee Q \Rightarrow R)$

$\equiv$ $\{$(De Morgan)$\}$

$(\neg(\neg Q \vee P) \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \Rightarrow R)$

$\equiv$ $\{$(elim-$\Rightarrow$), al contrario$\}$

$(R \Rightarrow \neg(\neg Q \vee P)) \wedge (P \vee Q \Rightarrow R)$

$\equiv$ $\{$(De Morgan), (Doppia Negazione)$\}$

$(R \Rightarrow (Q \wedge \neg P)) \wedge (P \vee Q \Rightarrow R)$

Possiamo dimostrare la formula (d) dimostrando la formula $Q \Rightarrow \neg P$, usando le formule $R \Rightarrow Q \wedge \neg P$ e $P \vee Q \Rightarrow R$ come *ipotesi non tautologiche*. Quindi partiamo da Q per derivare $\neg P$:

$\underline{Q}$

$\Rightarrow$ $\{$(Intro-$\vee$) occorrenza positiva$\}$

$\underline{P \vee Q}$

$\Rightarrow$ $\{$**Ip:** $P \vee Q \Rightarrow R$, occorrenza positiva$\}$

$\underline{R}$

$\Rightarrow$ $\{$**Ip:** $R \Rightarrow Q \wedge \neg P$, occorrenza positiva$\}$

$\underline{Q \wedge \neg P}$

$\Rightarrow$ $\{$(Sempl. - $\wedge$) occorrenza positiva$\}$

$\neg P$

5. Usando come ipotesi $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ e $R \Rightarrow S$, dimostrare per casi su Q che vale $(P \Rightarrow \neg Q \vee S)$

SOLUZIONE ESERCIZIO 5

- Caso $Q \equiv \mathbf{T}$. La formula da dimostrare si riduce come mostrato di seguito:

$$\begin{array}{ll} & P \Rightarrow \neg \underline{Q} \vee S \\ \equiv & \qquad \{\ \mathbf{Ip:}\ Q \equiv \mathbf{T}\} \\ & P \Rightarrow \underline{\neg \mathbf{T} \vee S} \\ \equiv & \qquad \{(\mathrm{T{:}F}),\ (\mathrm{Unità})\} \\ & P \Rightarrow S \end{array}$$

Mentre la prima ipotesi si riduce così:

$$\begin{array}{ll} & P \wedge \underline{Q} \Rightarrow R \\ \equiv & \qquad \{\ \mathbf{Ip:}\ Q \equiv \mathbf{T}\} \\ & \underline{P \wedge \mathbf{T}} \Rightarrow R \\ \equiv & \qquad \{(\mathrm{Unità})\} \\ & P \Rightarrow R \end{array}$$

A questo punto rimane da dimostrare la formula $P \Rightarrow S$, usando come ipotesi non tautologiche $(P \Rightarrow R)$ e $(R \Rightarrow S)$.

$$\begin{array}{ll} & \underline{P} \\ \Rightarrow & \qquad \{\ \mathbf{Ip:}\ P \Rightarrow R\ \textbf{occorrenza positiva}\ \} \\ & \underline{R} \\ \Rightarrow & \qquad \{\ \mathbf{Ip:}\ R \Rightarrow S\ \textbf{occorrenza positiva}\} \\ & S \end{array}$$

- Caso $Q \equiv \mathbf{F}$. La formula da dimostrare si riduce come mostrato di seguito.

$$\begin{array}{ll} & P \Rightarrow \neg \underline{Q} \vee S \\ \equiv & \qquad \{\ \mathbf{Ip:}\ Q \equiv \mathbf{F}\} \\ & P \Rightarrow \underline{\neg \mathbf{F} \vee S} \\ \equiv & \qquad \{(\mathrm{Zero}),(\mathrm{F{:}T})\} \\ & \underline{P \Rightarrow \mathbf{T}} \\ \equiv & \qquad \{(\mathrm{Elim.-} \Rightarrow)\} \\ & \underline{\neg P \vee \mathbf{T}} \\ \equiv & \qquad \{(\mathrm{Zero})\ \} \\ & \mathbf{T} \end{array}$$

Quindi in questo caso la formula è vera senza usare ulteriori ipotesi.

6. Si dica se le seguente proposizioni sono tautologie oppure no, motivando la risposta:

   (a) $(Q \Rightarrow R) \wedge (\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow (P \vee Q \Rightarrow P \wedge R)$

   (b) $(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg(P \Rightarrow \neg Q) \vee (Q \vee \neg R)) \ \Rightarrow\ (R \Rightarrow P)$

SOLUZIONE ESERCIZIO 6
Nessuna delle due proposizioni è una tautologia. Lasciamo allo studente il compito di determinare un assegnamento di valori di verità alle variabili proposizionali che le rendono falsa. Per (b), ad esempio $P = \mathbf{F}$, $Q = \mathbf{T}$, $R = \mathbf{T}$ fornisce il controesempio.