CALCOLO PROPOSIZIONALE: CENNI

Francesca Levi

Dipartimento di Informatica

May 11, 2018

La Logica

- La logica è la disciplina che studia le condizioni di correttezza del ragionamento

  > *"Occorre dire, anzitutto, quale oggetto riguardi ed a quale disciplina spetti la presente indagine, che essa cioè riguarda la dimostrazione e spetta alla scienza dimostrativa: in seguito, bisogna precisare cosa sia la premessa, cosa sia il termine, cosa sia il sillogismo..."* Aristotele

- Esempio di *sillogismo*
  - Tutti gli uomini sono mortali
  - Socrate è un uomo
  - Socrate è mortale

La Logica

Non tutti i sillogismi sono validi:

- Tutti gli animali sono mortali
- Pippo è mortale
- Pippo è un animale

- Tutti gli dei sono immortali
- Gli uomini non sono dei
- Gi uomini sono mortali

Logica Matematica e Informatica

- La logica matematica ha profondi legami con l'informatica:
  - l'informatica ha dato nuovo impulso allo studio della LM
  - la LM è parte integrante dei fondamenti teorici dell'informatica
- Usi della Logica Matematica in Informatica:
  - formalizzazione di requisiti
  - dimostrazione di proprietà di programmi (es: logica di Hoare)
  - fondamenti di programmazione dichiarativa (PROLOG)
  - fondamenti di strumenti di analisi e di verifica di sistemi
    - Model checking
    - Theorem proving

Calcolo Proposizionale: Cenni

- Calcolo Proposizionale
  - Connettivi logici e loro proprietà
  - Tautologie, deduzione corretta

Un Problema di Deduzione Logica

- Per ognuna delle seguenti deduzioni dire (motivando la risposta) se si tratta di una inferenza logicamente corretta.
    1. "Se io sono colpevole allora devo essere punito. *Io sono colpevole*. Quindi *devo essere punito*."
    2. "Se io sono colpevole allora devo essere punito. Io non *sono colpevole*. Quindi non *devo essere punito*."
    3. "Se io sono colpevole allora devo essere punito. Io non *devo essere punito*. Quindi non *sono colpevole*."
    4. "Se Se io sono colpevole allora devo essere punito. *Io devo essere punito*. Quindi *io sono colpevole*."
- *Come si formalizza? Come si può usare una dimostrazione per rispondere alla domanda?*

Il Calcolo Proposizionale

- È il nucleo di (quasi) tutte le logiche. Limitato potere espressivo, ma sufficiente per introdurre il concetto di deduzione
- Le *proposizioni* (*enunciati dichiarativi*) sono asserzioni a cui sia assegnabile in modo univoco un valore di verità in accordo ad una interpretazione del mondo a cui si riferiscono.
- “*dichiarativi sono non già tutti i discorsi, ma quelli in cui sussiste una enunciazione vera oppure falsa*” Aristotele

Esempi di Proposizioni "Atomiche"

1. Roma è la capitale d'Italia
2. La Francia è uno stato del continente asiatico
3. $1+1 = 2$
4. $2+2 = 3$

Esempi di Non Proposizioni

1. Che ora è?
2. Leggete queste note con attenzione
3. $x+1 = 2$

Connettivi Logici

Connettivo	Forma simbolica	Operazione corrispondente
not	$\neg p$	*negazione*
and, *e*	$p \wedge q$	*congiunzione*
or, *o*	$p \vee q$	*disgiunzione*
se p allora q	$p \Rightarrow q$	*implicazione*
p se e solo se q	$p \equiv q$	*equivalenza*

Calcolo Proposizionale

- Sintassi: definisce in modo formale le asserzioni (formule) del calcolo proposizionale
- Semantica: definisce in modo formale il significato delle (formule) del calcolo proposizionale

Simboli dell'alfabeto

- simboli proposizionali $\mathcal{P}$ (indichiamo con p oP)
- connettivi $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \equiv$
- parentesi (e)

Sintassi del Calcolo Proposizionale: le Formule

- si può definire induttivamente diamo le regole che consentono di costruire le formule sintatticamente corrette (atomiche e composte)
- Tutte e solo generate con le seguenti regole
  - Se $P \in \mathcal{P}$ è un simbolo proposizionale allora P è una formula detta formula atomica
  - **T** e **F** sono formule
  - Se P è una formula allora $(\neg P)$ è una formula
  - Se P e Q sono formule allora$(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \Rightarrow Q)$ e $(P \equiv Q)$ sono formule

Semantica (significato) delle Proposizioni

Tabelle di verità dei connettivi logici:

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \equiv Q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Si osservi in particolare il valore di verità di un'implicazione

Interpretazione di una Formula Proposizionale

- Come si determina il valore di verità di una formula?
- Il valore di verità si stabilisce in base ad un' interpretazione che fissa il significato dei simboli proposizionali
- Formalmente: una **interpretazione** è una funzione da variabili proposizionali a $\{T, F\}$
- Un' interpretazione determina il valore di verità di una formula
- Tale valore si calcola usando le tabelle di verità (induttivamente sulla sintassi della formula)
- Analogamente, si può costruire una tabella raccogliendo i valori per tutte le possibili interpretazioni (Tabella di Verità della Formula)

Un Esempio

- Formula

$$(P \land Q) \lor \neg R$$

- Interpretazione

$$\{P \mapsto T, Q \mapsto F, R \mapsto F\}$$

- Valore di verità usando una tabella:

P	Q	R	$P \land Q$	$\neg R$	$(P \land Q) \lor \neg R$
T	F	F	F	T	T

- Il valore si calcola sfruttando la tabella dei connettivi logici (induttivamente sulla sintassi della formula)
- In alternativa si usa una rappresentazione compatta

Valore di verità usando una tabella

- Formula

$$(P \wedge Q) \vee \neg R$$

- Interpretazione

$$\{P \mapsto T, Q \mapsto F, R \mapsto F\}$$

- Rappresentazione Compatta:

P	Q	R	$((P$	$\wedge$	$Q)$	$\vee$	$\neg$	$R)$
T	F	F	T	F	F	**T**	T	F
			(1)	(2)	(1)	**(3)**	(2)	(1)

Tabella di Verità di una Formula: raccoglie tutte le Interpretazioni

P	Q	R	$((P$	$\wedge$	$Q)$	$\vee$	$\neg$	$R)$
T	T	T	T	T	T	**T**	F	T
T	T	F	T	T	T	**T**	T	F
T	F	T	T	F	F	**F**	F	T
T	F	F	T	F	F	**T**	T	F
F	T	T	F	F	T	**F**	F	T
F	T	F	F	F	T	**T**	T	F
F	F	T	F	F	F	**F**	F	T
F	F	F	F	F	F	**T**	T	F
			(1)	(2)	(1)	(3)	(2)	(1)

Tautologie e Contraddizioni

- Una **tautologia** è una formula del calcolo proposizionale che vale **T** per qualunque interpretazione
- Una formula è **soddisfacibile** se esiste almeno una interpretazione che la rende **T**
- Una **contraddizione** è una formula che vale **F** per qualunque per qualunque interpretazione

Come si vede che una Formula non è una Tautologia?

- Mostrare che la seguente formula non è una tautologia:

$$((A \Rightarrow B) \land \neg A) \Rightarrow B$$

- Basta trovare un'interpretazione che la rende falsa
- Evitare di costruire l'intera tabella di verità!!!
- Determiniamo valori di verità per A e B che rendano falsa la formula
  - Poiché è un'implicazione, è falsa solo quando la premessa è vera e la conseguenza è falsa
  - Quindi $\{B \mapsto \mathbf{F}\}$
  - La premessa è una congiunzione: per essere vera entrambi gli argomenti devono essere veri
  - $\neg A$ è vera solo se $\{A \mapsto \mathbf{F}\}$
  - Quindi abbiamo trovato l'interpretazione $\{A \mapsto \mathbf{F}, B \mapsto \mathbf{F}\}$
  - Resta da controllare che renda la formula falsa

Esercizi: Formalizzazione di Enunciati

Formalizzare i seguenti asserti (introducendo opportune variabili proposizionali):

- Piove e fa freddo
- Fa freddo ma non piove
- Se ci sono le nuvole e non c'è vento, allora piove
- Piove solo se ci sono le nuvole e non c'è vento
- Piove se ci sono le nuvole e non c'è vento
- Se piove e non hai l'ombrello, ti bagni
- Se piove allora hai l'ombrello oppure ti bagni

Un Problema di Deduzione Logica

1. Per ognuna delle seguenti deduzioni dire (motivando la risposta) se si tratta di una inferenza logicamente corretta.
   1.1 "Se io sono colpevole allora devo essere punito. *Io sono colpevole*. Quindi *devo essere punito*."
   1.2 "Se io sono colpevole allora devo essere punito. Io non *sono colpevole*. Quindi non *devo essere punito*."
   1.3 "Se io sono colpevole allora devo essere punito. Io non *devo essere punito*. Quindi non *sono colpevole*."
   1.4 "Se Se io sono colpevole allora devo essere punito. *Io devo essere punito*. Quindi *io sono colpevole*."
2. *Come si formalizza? Come si può usare una dimostrazione per rispondere alla domanda?*

Formalizzazione del Problema di Deduzione Logica

- Per determinare se le inferenze sono logicamente corrette dobbiamo formalizzare la deduzione e quindi verificare se la formula ottenuta è una tautologia.
- Usare il simbolo proposizionale C per esprimere "io sono colpevole" ed il simbolo proposizionale P per esprimere "io devo essere punito".
- In ogni caso l'asserzione " "Se io sono colpevole allora devo essere punito" può essere formalizzata come

$$(C \Rightarrow P)$$

Problema di Deduzione Logica:(1)

1. Una possibile formalizzazione è

$$((C \Rightarrow P) \wedge C) \Rightarrow P$$

   Questa formula corrisponde ad una ben nota legge logica *Modus Ponens* che è una tautologia. Quindi in questo caso la deduzione è corretta.

2. Una possibile formalizzazione è

$$(C \Rightarrow P) \wedge (\neg C)) \Rightarrow (\neg P)$$

   Questa formula non è una tautologia infatti è possibile trovare una interpretazione che la rende falsa ($\mathbf{F}$), ovvero $\{P \mapsto \mathbf{T}, C \mapsto \mathbf{F}\}$. Quindi in questo caso la deduzione non è corretta.

Problema di Deduzione Logica:(2)

1. Una possibile formalizzazione è

$$((C \Rightarrow P) \wedge (\neg P)) \Rightarrow (\neg C)$$

Anche questa formula corrisponde alla legge *Modus Tollens* che è una tautologia. Quindi in questo caso la deduzione è corretta.

2. Una possibile formalizzazione è

$$((C \Rightarrow P) \wedge P) \Rightarrow C$$

Questa formula non è una tautologia infatti è possibile trovare una interpretazione che la rende falsa ovvero $\{P \mapsto \mathbf{T}, C \mapsto \mathbf{F}\}$. Quindi in questo caso la deduzione non è corretta.