

LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2017-2018

Prima prova di verifica intermedia - 2/11/2017 - Soluzioni proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1

Si provi che la seguente proposizione è una tautologia, usando opportune dimostrazioni (non tabelle di verità):

$$(P \vee \neg S \Rightarrow Q \vee \neg R) \Rightarrow \neg R \equiv (R \Rightarrow \neg Q) \wedge (S \Rightarrow \neg R \vee P)$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Per dimostrare la formula semplifichiamo prima il membro sinistro e poi quello destro dell'equivalenza:

$$\begin{aligned} & (P \vee \neg S \Rightarrow Q \vee \neg R) \Rightarrow \neg R \\ \equiv & \quad \{(elim-\Rightarrow)\} \\ & \underline{\neg(P \vee \neg S) \vee (Q \vee \neg R) \Rightarrow \neg R} \\ \equiv & \quad \{(elim-\Rightarrow)\} \\ & \underline{\neg(\neg(P \vee \neg S) \vee (Q \vee \neg R)) \vee \neg R} \\ \equiv & \quad \{(De Morgan), (Doppia Negazione)\} \\ & ((P \vee \neg S) \wedge \underline{\neg(Q \vee \neg R)}) \vee \neg R \\ \equiv & \quad \{(De Morgan), (Doppia Negazione)\} \\ & \underline{((P \vee \neg S) \wedge (\neg Q \wedge R)) \vee \neg R} \\ \equiv & \quad \{(Complemento), (Associativa)\} \\ & ((P \vee \neg S) \wedge \neg Q) \vee \neg R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (R \Rightarrow \neg Q) \wedge (S \Rightarrow \neg R \vee P) \\ \equiv & \quad \{(elim-\Rightarrow), \text{ due volte}\} \\ & \underline{(\neg R \vee \neg Q) \wedge (\neg S \vee (\neg R \vee P))} \\ \equiv & \quad \{(Distributiva), (Associativa)\} \\ & \neg R \vee (\neg Q \wedge (\neg S \vee P)) \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2

Per ognuna delle seguenti formule si dica se si tratta di una tautologia oppure no. Se è una tautologia si fornisca una dimostrazione altrimenti si fornisca un controesempio.

1. $(P \Rightarrow \neg((\neg Q \wedge \neg R) \vee R)) \wedge (S \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow \neg S)$
2. $(P \Rightarrow (\neg Q \wedge R) \vee \neg R) \wedge (S \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow \neg S)$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

1. La formula è una tautologia. Mostriamo due dimostrazioni alternative.

- Sviluppiamo una dimostrazione partendo dalla premessa dell'implicazione per arrivare alla conclusione:

$$\begin{aligned} & (P \Rightarrow \neg((\neg Q \wedge \neg R) \vee R)) \wedge (S \Rightarrow R) \\ \equiv & \quad \{(Complemento)\} \\ & (P \Rightarrow \underline{\neg(\neg Q \vee R)}) \wedge (S \Rightarrow R) \\ \equiv & \quad \{(De Morgan), (Doppia Negazione)\} \\ & (P \Rightarrow \underline{Q \wedge \neg R}) \wedge (S \Rightarrow R) \\ \Rightarrow & \quad \{(Sempl-\wedge), \text{ occ. pos.}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (P \Rightarrow \neg R) \wedge (S \Rightarrow R) \\
\equiv & \quad \{(Contropositiva)\} \\
& \underline{(P \Rightarrow \neg R) \wedge (\neg R \Rightarrow \neg S)} \\
\Rightarrow & \quad \{(trans-\Rightarrow), \text{occ. pos.}\} \\
& (P \Rightarrow \neg S)
\end{aligned}$$

- Sviluppiamo una dimostrazione con le *ipotesi non tautologiche*. In particolare dimostriamo la formula $P \Rightarrow \neg S$ usando le formule $P \Rightarrow \neg((\neg Q \wedge \neg R) \vee R)$ e $S \Rightarrow R$ come *ipotesi non tautologiche*. Sviluppiamo la prova partendo dalla premessa dell'implicazione per arrivare alla conclusione:

$$\begin{aligned}
& \underline{P} \\
\Rightarrow & \quad \{\mathbf{Ip}: P \Rightarrow \neg((\neg Q \wedge \neg R) \vee R), \text{occ. pos.}\} \\
& \underline{\neg((\neg Q \wedge \neg R) \vee R)} \\
\equiv & \quad \{(Complemento)\} \\
& \underline{\neg(\neg Q \vee R)} \\
\equiv & \quad \{(De Morgan),(Doppia Negazione)\} \\
& Q \wedge \neg R \\
\Rightarrow & \quad \{\mathbf{Ip}: \neg R \Rightarrow \neg S, (Contropositiva), \text{occ. pos.}\} \\
& \underline{Q \wedge \neg S} \\
\Rightarrow & \quad \{(Sempl-\wedge), \text{occ. pos.}\} \\
& \neg S
\end{aligned}$$

2. La formula non è una tautologia. Per mostrarlo basta trovare una interpretazione che renda falsa la formula (un *controesempio*). Per esempio: $P = \mathbf{T}$, $Q = \mathbf{F}$, $R = \mathbf{T}$ e $S = \mathbf{T}$.

ESERCIZIO 3

Si dica, motivando la risposta, se il seguente passo di dimostrazione è corretto oppure no:

$$\begin{aligned}
& ((P \Rightarrow \neg(R \wedge \neg S)) \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg R \vee S \\
\Leftarrow & \quad \{(Sempl-\wedge), (Doppia Negazione)\} \\
& ((P \Rightarrow S) \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg R \vee S
\end{aligned}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

In questo caso la legge (Sempl- \wedge) viene applicata come $R \wedge \neg S \Rightarrow \neg S$. Quindi il passo di dimostrazione è corretto in base al *Principio di Sostituzione* se $R \wedge \neg S$ occorre negativamente nella formula $((P \Rightarrow \neg(R \wedge \neg S)) \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg R \vee S$. Concludiamo che

$$\begin{aligned}
& ((P \Rightarrow \neg(R \wedge \neg S)) \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg R \vee S \\
\Leftarrow & \quad \{(Sempl-\wedge), (Doppia Negazione) \text{ occorre negativamente}\} \\
& ((P \Rightarrow S) \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg R \vee S
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 4

Si consideri l'alfabeto del primo ordine con $\mathcal{C} = \{P\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{\textit{italiana}, \textit{volo}, =\}$, dove il simbolo di predicato *italiana* è unario mentre *volo* e $=$ sono binari. Si consideri l'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove \mathcal{D} è l'insieme delle città e α è definita come segue:

- $\alpha(P) = \text{“la città Parigi”}$,
- $\alpha(\textit{italiana})(d) = \mathbf{T}$ se e solo se d è una città italiana,
- $\alpha(\textit{volo})(d, d') = \mathbf{T}$ se e solo se esiste un volo aereo diretto che parte dalla città d ed arriva alla città d' .
- $\alpha(=)(d, d') = \mathbf{T}$ se e solo se d e d' sono la stessa città.

Si formalizzi il seguente enunciato:

*Ogni città italiana ha un volo aereo per Parigi con una tappa intermedia
in un'altra città italiana se non ha un volo diretto per Parigi*

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

L'enunciato può essere formalizzato nel seguente modo:

$$(\forall x. \textit{italiana}(x) \wedge \neg \textit{volo}(x, P) \Rightarrow (\exists y. \textit{italiana}(y) \wedge \neg(y = x) \wedge \textit{volo}(y, P) \wedge \textit{volo}(x, y)))$$

ESERCIZIO 5

Si calcoli, motivando la risposta, il valore di verità della seguente formula sull'alfabeto del primo ordine con $\mathcal{C} = \{a\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$ e $\mathcal{P} = \{P, Q\}$:

$$\phi = (\forall x. Q(x, a) \Rightarrow (\exists y. P(x, y) \wedge \neg P(y, x)))$$

nell'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D} = \{1, 2, 3\}$ ed α è definita come segue

$$\begin{aligned} \alpha(a) &= 2 \\ \alpha(Q)(z, v) &= \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } (z, v) \in \{(1, 2), (3, 2), (1, 1)\} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases} \\ \alpha(P)(z, v) &= \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } (z, v) \in \{(1, 2), (3, 1), (3, 2), (2, 3), (3, 3)\} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

Si calcoli cioè $\mathcal{I}_\rho(\phi)$ usando le regole della semantica del primo ordine, dove ρ è un assegnamento arbitrario.

SOLUZIONE ESERCIZIO 5

Mostriamo che la formula ϕ è vera nell'interpretazione data.

La formula ϕ è una **quantificazione universale**, quindi per la regola (S8) è vera se e solo se assegnando a x un qualunque valore d del dominio \mathcal{D} la formula nella portata è vera. Formalmente abbiamo che $\mathcal{I}_\rho(\phi)$ è vera se, per ogni valore d tale che $d \in \mathcal{D}$, $\mathcal{I}_{\rho[d/x]}(\phi_1)$ è vera, con $\phi_1 = Q(x, a) \Rightarrow (\exists y. P(x, y) \wedge \neg P(y, x))$.

Procediamo per casi esaminando i tre possibili valori del dominio.

[$d = 1$] Dato che ϕ_1 è una **implicazione** per la regola (S6) abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(\phi_1)$ è falsa se $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(Q(x, a))$ è vera e $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(\phi_2)$ (dove $\phi_2 = (\exists y. P(x, y) \wedge \neg P(y, x))$) è falsa, altrimenti $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(\phi_1)$ è vera. Notiamo che in questo caso abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(Q(x, a)) = \mathbf{T}$. Formalmente dalle regole (S1), (R0) e (R1):

$$\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(Q(x, a)) = \alpha(Q)(\alpha_{\rho[1/x]}(x), \alpha_{\rho[1/x]}(a)) = \alpha(Q)(1, 2) = \mathbf{T}.$$

Quindi dobbiamo considerare la conclusione dell'implicazione e calcolare il valore di verità di $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(\phi_2)$. Dato che si tratta di una **quantificazione esistenziale** usiamo la regola (S9) per determinare $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(\phi_2)$. Abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(\phi_2)$ è vera se esiste almeno un valore d' tale che $d' \in \mathcal{D}$, per cui $\mathcal{I}_{\rho[1/x][d'/y]}(\phi_3)$ è vera dove $\phi_3 = P(x, y) \wedge \neg P(y, x)$. In questo caso basta prendere $d' = 2$ e otteniamo $\mathcal{I}_{\rho[1/x][2/y]}(\phi_3) = \mathbf{T}$. Formalmente dalla regola (S4) $\mathcal{I}_{\rho[1/x][2/y]}(P(x, y) \wedge \neg P(y, x)) = \mathbf{T}$ dato che sia $\mathcal{I}_{\rho[1/x][2/y]}(P(x, y)) = \mathbf{T}$ che $\mathcal{I}_{\rho[1/x][2/y]}(\neg P(y, x)) = \mathbf{T}$. Infatti dalle regole (S1) e (S3) abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\rho[1/x][2/y]}(P(x, y)) &= \alpha(P)(\alpha_{\rho[1/x][2/y]}(x), \alpha_{\rho[1/x][2/y]}(y)) = \alpha(P)(1, 2) = \mathbf{T} \\ \mathcal{I}_{\rho[1/x][2/y]}(\neg P(y, x)) &= \alpha(\neg P)(\alpha_{\rho[1/x][2/y]}(y), \alpha_{\rho[1/x][2/y]}(x)) = \alpha(\neg P)(2, 1) = \mathbf{T} \end{aligned}$$

[$d = 2$] Ripetendo un ragionamento analogo a quello del punto precedente abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[2/x]}(\phi_1)$ è falsa se $\mathcal{I}_{\rho[2/x]}(Q(x, a))$ è vera e $\mathcal{I}_{\rho[2/x]}(\phi_2)$ è falsa, altrimenti $\mathcal{I}_{\rho[2/x]}(\phi_1)$ è vera. In questo caso a differenza del caso precedente abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[2/x]}(Q(x, a)) = \mathbf{F}$. Formalmente dalle regole (S1), (R0) e (R1):

$$\mathcal{I}_{\rho[2/x]}(Q(x, a)) = \alpha(Q)(\alpha_{\rho[2/x]}(x), \alpha_{\rho[2/x]}(a)) = \alpha(Q)(2, 2) = \mathbf{F}.$$

[$d = 3$] Ripetendo un ragionamento analogo a quello dei punti precedenti abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(\phi_1)$ è falsa se $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(Q(x, a))$ è vera e $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(\phi_2)$ è falsa, altrimenti $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(\phi_1)$ è vera. Notiamo che in questo caso $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(Q(x, a)) = \mathbf{T}$ dato che $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(Q(x, a)) = \alpha(Q)(3, 2) = \mathbf{T}$.

Inoltre abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(\phi_2)$ è vera se *esiste almeno* un valore d' tale che $d' \in \mathcal{D}$, per cui $\mathcal{I}_{\rho[3/x][d'/y]}(\phi_3)$ è vera, con $\phi_3 = P(x, y) \wedge \neg P(y, x)$. In questo caso basta prendere $d' = 1$ e otteniamo $\mathcal{I}_{\rho[3/x][1/y]}(\phi_3) = \mathbf{T}$. Formalmente dalla regola (S4) $\mathcal{I}_{\rho[3/x][1/y]}(P(x, y) \wedge \neg P(y, x)) = \mathbf{T}$ dato che sia $\mathcal{I}_{\rho[3/x][1/y]}(P(x, y)) = \mathbf{T}$ che $\mathcal{I}_{\rho[3/x][1/y]}(\neg P(y, x)) = \mathbf{T}$. Formalmente dalle regole (S1) e (S3) abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\rho[3/x][1/y]}(P(x, y)) &= \alpha(P)(\alpha_{\rho[3/x][1/y]}(x), \alpha_{\rho[3/x][1/y]}(y)) = \alpha(P)(3, 1) = \mathbf{T} \\ \mathcal{I}_{\rho[3/x][1/y]}(P(y, x)) &= \alpha(P)(\alpha_{\rho[3/x][1/y]}(y), \alpha_{\rho[3/x][1/y]}(x)) = \alpha(P)(1, 3) = \mathbf{F}. \end{aligned}$$