

# LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE (A,B) - a.a. 2012-2013

## SOLUZIONI PROPOSTE

### PRIMO COMPITINO - 07/11/2012

#### ESERCIZIO 1

Si provi che le seguenti proposizioni sono tautologie, fornendo una opportuna dimostrazione (NON una tabella di verità):

1.  $\neg P \vee Q \Rightarrow R \equiv (\neg R \Rightarrow P) \wedge (Q \Rightarrow R)$ ;
2.  $(Q \Rightarrow \neg S) \wedge (\neg R \Rightarrow (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \wedge S \Rightarrow R)$ .

#### Soluzione (1)

$$\begin{aligned}
 & \neg P \vee Q \Rightarrow \\
 \equiv & \quad \{ \text{Elim-impl} \} \\
 & \neg(\neg P \vee Q) \vee R \\
 \equiv & \quad \{ \text{De Morgan, Doppia Neg.} \} \\
 & (P \wedge \neg Q) \vee R \\
 \equiv & \quad \{ \text{Distributività} \} \\
 & (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \\
 \equiv & \quad \{ \text{Elim-impl, due volte} \} \\
 & (\neg R \Rightarrow P) \wedge (Q \Rightarrow R)
 \end{aligned}$$

#### Soluzione (2.)

Usiamo una dimostrazione con ipotesi non tautologiche, mostrando che  $P \wedge S \Rightarrow R$  usando come ipotesi (a)  $Q \Rightarrow \neg S$  e (b)  $\neg R \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ .

Si osservi che (a) è equivalente ad (a')  $S \Rightarrow \neg Q$  (per Controposizione), mentre (b) è equivalente a (b')  $P \wedge \neg Q \Rightarrow R$ . Infatti:

$$\begin{aligned}
 (b) \quad & \neg R \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \\
 \equiv & \quad \{ \text{Elim-impl} \} \\
 & \neg R \Rightarrow (\neg P \vee Q) \\
 \equiv & \quad \{ \text{Controposizione, Doppia Neg.} \} \\
 & \neg(\neg P \vee Q) \Rightarrow R \\
 \equiv & \quad \{ \text{De Morgan, Doppia Neg.} \} \\
 (b') \quad & P \wedge \neg Q \Rightarrow R
 \end{aligned}$$

Quindi otteniamo:

$$\begin{aligned}
 & P \wedge S \\
 \Rightarrow & \quad \{ \text{Ip: (a')} S \Rightarrow \neg Q \} \\
 & P \wedge \neg Q \\
 \Rightarrow & \quad \{ \text{Ip: (b')} P \wedge \neg Q \Rightarrow R \} \\
 & R
 \end{aligned}$$

#### ESERCIZIO 2

Utilizzando la logica del prim'ordine si formalizzino i seguenti enunciati dichiarativi. Indicare esplicitamente l'interpretazione intesa (la stessa per entrambi gli enunciati).

1. "Paolo e Maria sono residenti nella stessa città."
2. "I residenti di una città o ci sono nati o ci sono immigrati."

#### Soluzione

##### • Linguaggio

- $\mathbf{C} = \{Paolo, Maria\}$
- $\mathbf{F} = \emptyset$
- $\mathbf{P} = \{persona(-), citta(-), residente(-, -), nato(-, -), immigrato(-, -)\}$

##### • Interpretazione: $\mathbf{I} = (\mathbf{D}, \alpha)$

- $\mathbf{D} = \mathcal{P} \uplus \mathcal{C}$ , con  $\mathcal{P}$  insieme delle persone e  $\mathcal{C}$  insieme delle città.
- $\alpha(Paolo) =$  "la persona chiamata Paolo"
- $\alpha(Maria) =$  "la persona chiamata Maria"
- $\alpha(persona)(d) \equiv \mathbf{T}$  se e solo se  $d$  è una persona

- $\alpha(citta)(d) \equiv \mathbf{T}$  se e solo se  $d$  è una città
- $\alpha(residente)(d, d') \equiv \mathbf{T}$  se e solo se  $d$  è una persona,  $d'$  è una città, e  $d$  risiede in  $d'$
- $\alpha(nato)(d, d') \equiv \mathbf{T}$  se e solo se  $d$  è una persona,  $d'$  è una città, e  $d$  è nato a  $d'$
- $\alpha(immigrato)(d, d') \equiv \mathbf{T}$  se e solo se  $d$  è una persona,  $d'$  è una città, e  $d$  è immigrato a  $d'$

I due enunciati possono essere formalizzati nel seguente modo:

1.  $(\exists x.citta(x) \wedge residente(Paolo, x) \wedge residente(Maria, x))$
2.  $(\forall x.(\forall y.persona(x) \wedge citta(y) \wedge residente(x, y) \Rightarrow nato(x, y) \vee immigrato(x, y)))$

Poiché il dominio di una variabile (persona o città) è univocamente determinato dalla posizione dell'argomento in un predicato, anche le seguenti soluzioni più semplici sono corrette:

1.  $(\exists x.residente(Paolo, x) \wedge residente(Maria, x))$
2.  $(\forall x.(\forall y.residente(x, y) \Rightarrow nato(x, y) \vee immigrato(x, y)))$

### ESERCIZIO 3

Si provi che le seguenti formule sono valide ( $P$ ,  $Q$  e  $S$  contengono la variabile libera  $x$ )

1.  $(\exists x.R \wedge \neg S) \wedge (\neg(\forall x.P) \Rightarrow (\forall x.S)) \Rightarrow (\forall x.P)$
2.  $(\exists x.P \vee \neg Q) \wedge (\forall x.(P \Rightarrow S) \wedge (\neg S \Rightarrow Q)) \Rightarrow (\exists x.S)$

**Soluzione (1.)** Partiamo dalla premessa:

$$\begin{aligned}
 & (\exists x.R \wedge \neg S) \wedge (\neg(\forall x.P) \Rightarrow (\forall x.S)) \\
 \Rightarrow & \{ \exists : \wedge \} \\
 & (\exists x.R) \wedge (\exists x.\neg S) \wedge (\neg(\forall x.P) \Rightarrow (\forall x.S)) \\
 \equiv & \{ \text{Controposizione, Doppia Neg.} \} \\
 & (\exists x.R) \wedge (\exists x.\neg S) \wedge (\neg(\forall x.S) \Rightarrow (\forall x.P)) \\
 \equiv & \{ \text{De Morgan} \} \\
 & (\exists x.R) \wedge \neg(\forall x.S) \wedge (\neg(\forall x.S) \Rightarrow (\forall x.P)) \\
 \Rightarrow & \{ \text{Sempl-}\wedge \} \\
 & \neg(\forall x.S) \wedge (\neg(\forall x.S) \Rightarrow (\forall x.P)) \\
 \Rightarrow & \{ \text{Modus Ponens} \} \\
 & (\forall x.P)
 \end{aligned}$$

**Soluzione (2.)** Per la Regola di Skolemizzazione, è sufficiente dimostrare

$$(\exists x.P \vee \neg Q) \wedge (P[d/x] \vee \neg Q[d/x]) \wedge (\forall x.(P \Rightarrow S) \wedge (\neg S \Rightarrow Q)) \Rightarrow (\exists x.S)$$

dove  $d$  è una costante nuova. Partiamo dalla premessa:

$$\begin{aligned}
 & (\exists x.P \vee \neg Q) \wedge (P[d/x] \vee \neg Q[d/x]) \wedge (\forall x.(P \Rightarrow S) \wedge (\neg S \Rightarrow Q)) \\
 \Rightarrow & \{ \text{Sempl-}\wedge \} \\
 & (P[d/x] \vee \neg Q[d/x]) \wedge (\forall x.(P \Rightarrow S) \wedge (\neg S \Rightarrow Q)) \\
 \Rightarrow & \{ \text{Elim-}\forall \} \\
 & (*) \quad (P[d/x] \vee \neg Q[d/x]) \wedge (P[d/x] \Rightarrow S[d/x]) \wedge (\neg S[d/x] \Rightarrow Q[d/x]) \\
 \equiv & \{ \text{Elim-}\Rightarrow, \text{ due volte, Doppia Neg.} \} \\
 & (P[d/x] \vee \neg Q[d/x]) \wedge (\neg P[d/x] \vee S[d/x]) \wedge (S[d/x] \vee Q[d/x]) \\
 \Rightarrow & \{ \text{Risoluzione} \} \\
 & (\neg Q[d/x] \vee S[d/x]) \wedge (S[d/x] \vee Q[d/x]) \\
 \Rightarrow & \{ \text{Risoluzione} \} \\
 & S[d/x] \vee S[d/x] \\
 \equiv & \{ \text{Idempotenza} \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & S[d/x] \\ \Rightarrow & \{ \text{Intro-}\exists \} \\ & (\exists x.S) \end{aligned}$$

Una prova alternativa, a partire da (\*), è la seguente:

$$\begin{aligned} & (*) \quad (P[d/x] \vee \neg Q[d/x]) \wedge (P[d/x] \Rightarrow S[d/x]) \wedge (\neg S[d/x] \Rightarrow Q[d/x]) \\ \equiv & \{ \text{Elim-}\Rightarrow \} \\ & (Q[d/x] \Rightarrow P[d/x]) \wedge (P[d/x] \Rightarrow S[d/x]) \wedge (\neg S[d/x] \Rightarrow Q[d/x]) \\ \Rightarrow & \{ \text{Trans-}\Rightarrow \} \\ & (Q[d/x] \Rightarrow S[d/x]) \wedge (\neg S[d/x] \Rightarrow Q[d/x]) \\ \Rightarrow & \{ \text{Trans-}\Rightarrow \} \\ & \neg S[d/x] \Rightarrow S[d/x] \\ \equiv & \{ \text{Elim-}\Rightarrow, \text{Idempotenza} \} \\ & S[d/x] \\ \Rightarrow & \{ \text{Intro-}\exists \} \\ & (\exists x.S) \end{aligned}$$

#### ESERCIZIO 4

Sia fissata l'interpretazione dei naturali vista a lezione, estesa con i simboli di predicato  $divide(-, -)$  e  $mcm(-, -, -)$  così interpretati:

- $\alpha(divide)(n, m)$  vale **true** se  $n$  è un divisore di  $m$ ,
- $\alpha(mcm)(q, n, m)$  vale **true** se  $q$  è il minimo comune multiplo di  $n$  e  $m$ .

Si formalizzi il seguente enunciato dichiarativo:

“Se due numeri hanno un divisore maggiore di 1 in comune,  
allora il loro prodotto è strettamente maggiore del loro minimo comune multiplo.”

#### Soluzione

$$(\forall x.(\forall y.(\exists z.z \geq 1 \wedge divide(z, x) \wedge divide(z, y)) \Rightarrow (\forall v.mcm(v, x, y) \Rightarrow x * y < v)))$$

#### ESERCIZIO 5

Usando la definizione di semantica della logica del prim'ordine, calcolare il valore di verità della formula

$$\Phi \iff (\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x) \vee R(x))$$

nell'interpretazione  $I = (D, \alpha)$  dove  $D = \{a, b, c\}$  e  $\alpha$  è definita come segue:

$$\alpha(P)(x) = \begin{cases} T & \text{se } x = a \text{ o } x = b \\ F & \text{se } x = c \end{cases} \quad \alpha(Q)(x) = \begin{cases} T & \text{se } x = a \text{ o } x = c \\ F & \text{se } x = b \end{cases} \quad \alpha(R)(x) = \begin{cases} T & \text{se } x = b \\ F & \text{se } x = a \text{ o } x = c \end{cases}$$

Più precisamente, si chiede di calcolare il valore di  $I_{\rho_0}(\Phi)$  utilizzando le regole della semantica del prim'ordine, dove  $\rho_0$  è un assegnamento arbitrario.

**Soluzione** La formula è una quantificazione universale, pertanto applichiamo la regola (S8) a pagina 38 della dispensa [LP1]. La regola ci dice che la formula è vera in  $I$  sse (†)  $I_{\rho_0[d/x]}(P(x) \Rightarrow Q(x) \vee R(x))$  è vera per ogni  $d \in D = \{a, b, c\}$ . Abbiamo quindi tre casi:

( $d = a$ ) Per la regola (S1), abbiamo che  $I_{\rho_0[a/x]}(P(x)) = \alpha(P)(a)$ , e quindi (\*)  $I_{\rho_0[a/x]}(P(x)) = T$  per la definizione di  $\alpha(P)$ . Analogamente abbiamo che  $I_{\rho_0[a/x]}(Q(x)) = \alpha(Q)(a) = T$ , e quindi per la regola (S5) anche (\*\*)  $I_{\rho_0[a/x]}(Q(x) \vee R(x)) = T$ . Infine applicando la regola (S6) a (\*) e (\*\*) otteniamo che  $I_{\rho_0[a/x]}(P(x) \Rightarrow Q(x) \vee R(x)) = T$ .

( $d = b$ ) Il ragionamento è analogo al caso precedente, osservando che (\*)  $I_{\rho_0[b/x]}(P(x)) = \alpha(P)(b) = T$ , e (\*\*)  $I_{\rho_0[b/x]}(Q(x) \vee R(x)) = T$  poiché  $I_{\rho_0[b/x]}(R(x)) = \alpha(R)(b) = T$ .

( $d = c$ ) In questo caso abbiamo (\*)  $I_{\rho_0[c/x]}(P(x)) = \alpha(P)(c) = F$ , che con la regola (S6) è sufficiente per concludere che  $I_{\rho_0[c/x]}(P(x) \Rightarrow Q(x) \vee R(x)) = T$ .

Poichè l'implicazione (†) è vera per tutti gli elementi del dominio, anche la formula originale è vera.