LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE (A,B)
SOLUZIONI PROPOSTE
PRIMO COMPITINO - 04/11/2011

ESERCIZIO 1
Utilizzando il Calcolo Proposizionale, si formalizzi il seguente enunciato dichiarativo.

"Se si gioca e si studia allora si superera l'esame, ma se si gioca solo non lo si supera"

Soluzione Usiamo le seguenti proposizioni atomiche:

- $G \equiv$ "si gioca"
- $S \equiv$ "si studia"
- $E \equiv$ "si supera l'esame"

Allora la seguente proposizione formalizza correttamente l'enunciato:

$$(G \wedge S \Rightarrow E) \wedge (G \wedge \neg S \Rightarrow \neg E)$$

Nota: La soluzione $(G \wedge S \Rightarrow E) \wedge (G \Rightarrow \neg E)$ non è corretta perché non formalizza correttamente la premessa "se si gioca **solo**".

ESERCIZIO 2
Si provi che le seguenti proposizioni sono tautologie:

1. $(R \vee Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q) \wedge \neg R \Rightarrow \neg P$
2. $(\neg P \vee Q \Rightarrow \neg R \wedge S) \iff (\neg P \Rightarrow \neg(R \vee \neg S)) \wedge (\neg Q \vee (S \wedge \neg R))$

Soluzione 2.1: Partiamo dalla premessa:

$$\begin{array}{ll}
 & (R \vee Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q) \wedge \neg R \\
\equiv & \quad \{ \text{Elim-}\Rightarrow \} \\
 & (R \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg R \\
\equiv & \quad \{ \text{Complemento} \} \\
 & Q \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg R \\
\equiv & \quad \{ \text{Complemento} \} \\
 & Q \wedge \neg P \wedge \neg R \\
\Rightarrow & \quad \{ \text{Sempl-}\wedge \} \\
 & \neg P
\end{array}$$

Soluzione 2.2: Partiamo dal membro destro:

$$\begin{array}{ll}
 & (\neg P \Rightarrow \neg(R \vee \neg S)) \wedge (\neg Q \vee (S \wedge \neg R)) \\
\equiv & \quad \{ \text{Elim-}\Rightarrow\text{, Doppia Negazione} \} \\
 & (P \vee \neg(R \vee \neg S)) \wedge (\neg Q \vee (S \wedge \neg R)) \\
\equiv & \quad \{ \text{De Morgan} \} \\
 & (P \vee (\neg R \wedge S)) \wedge (\neg Q \vee (S \wedge \neg R)) \\
\equiv & \quad \{ \text{Commutatività, Distributività al contrario} \} \\
 & (P \wedge \neg Q) \vee (\neg R \wedge S) \\
\equiv & \quad \{ \text{Elim-}\Rightarrow\text{al contrario} \} \\
 & \neg(P \wedge \neg Q) \Rightarrow (\neg R \wedge S) \\
\equiv & \quad \{ \text{De Morgan} \} \\
 & (\neg P \vee Q) \Rightarrow (\neg R \wedge S)
\end{array}$$

ESERCIZIO 3
Si dica se la seguente proposizione è una tautologia oppure no, motivando la risposta:

$$P \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \vee Q \Rightarrow P \wedge R)$$

Soluzione
La proposizione non è una tautologia perché se si pone $P \equiv T$, $Q \equiv F$ e $R \equiv F$, allora la proposizione ha il valore F.

ESERCIZIO 4
Utilizzando la logica del prim'ordine si formalizzi il seguente enunciato dichiarativo, indicando esplicitamente l'interpretazione intesa.

"Ogni studente ha una matricola, ma non ci sono due studenti con la stessa matricola"

Soluzione

- **Linguaggio**
  - $\mathbf{C} = \emptyset$
  - $\mathbf{F} = \emptyset$
  - $\mathbf{P} = \{studente(\cdot), haMatricola(\cdot, \cdot), \cdot = \cdot\}$
- **Interpretazione**: $\mathbf{I} = (\mathbf{D}, \alpha)$
  - $\mathbf{D} = \mathcal{P} \cup \mathcal{M}$, con $\mathcal{P}$ insieme delle persone e $\mathcal{M}$ insieme delle matricole.
  - $\alpha(studente)(d) \equiv \mathbf{T}$ se e solo se d è uno studente
  - $\alpha(haMatricola)(d_1, d_2) \equiv \mathbf{T}$ se e solo la persona d_1 ha la matricola d_2
  - $=$ è l'usuale predicato di uguaglianza

Una formalizzazione corretta è allora

$$(\forall x.studente(x) \Rightarrow (\exists y.haMatricola(x, y)))\wedge$$
$$\neg(\exists x, y, z.studente(x) \wedge studente(y) \wedge \neg(x = y) \wedge haMatricola(x, z) \wedge haMatricola(y, z))$$

ESERCIZIO 5
Si provi che la seguente formula è valida (P, Q e R contengono la variabile libera x)

$$(\exists x.R \wedge Q) \wedge ((\forall x.P) \vee (\forall x.\neg R)) \Rightarrow (\exists x.P) \wedge (\exists x.Q)$$

Soluzione 1: Per la regola di skolemizzazione, è sufficiente dimostrare la validità della seguente implicazione, dove d è una nuova costante:
$R[d/x] \wedge Q[d/x] \wedge ((\forall x.P) \vee (\forall x.\neg R)) \Rightarrow (\exists x.P) \wedge (\exists x.Q)$
Partiamo dalla premessa:
$R[d/x] \wedge Q[d/x] \wedge ((\forall x.P) \vee (\forall x.\neg R))$
$\Rightarrow$ { Elim-$\forall$, due volte }
$R[d/x] \wedge Q[d/x] \wedge (P[d/x] \vee \neg R[d/x])$
$\equiv$ { Complemento }
$R[d/x] \wedge Q[d/x] \wedge P[d/x]$
$\Rightarrow$ { Sempl-$\wedge$}
$Q[d/x] \wedge P[d/x]$
$\Rightarrow$ { Intro-$\exists$, due volte }
$(\exists x.Q) \wedge (\exists x.P)$

Soluzione 2: Partiamo dalla premessa:
$(\exists x.R \wedge Q) \wedge ((\forall x.P) \vee (\forall x.\neg R))$
$\Rightarrow$ { $\exists : \wedge$ }
$(\exists x.R) \wedge (\exists x.Q) \wedge ((\forall x.P) \vee (\forall x.\neg R))$
$\equiv$ { De Morgan }
$(\exists x.R) \wedge (\exists x.Q) \wedge ((\forall x.P) \vee \neg(\exists x.R))$
$\equiv$ { Complemento }
$(\exists x.R) \wedge (\exists x.Q) \wedge (\forall x.P)$
$\Rightarrow$ { Sempl-$\wedge$, Elim-$\forall$ }
$(\exists x.Q) \wedge P[d/x]$
$\Rightarrow$ { Intro-$\exists$ }
$(\exists x.Q) \wedge (\exists x.P)$

ESERCIZIO 6
Usando la definizione di semantica della logica del prim'ordine, mostrare che la formula

$$(\forall x.Q(x) \Rightarrow (\exists y.P(x, y)))$$

è vera nell'interpretazione $I = (D, \alpha)$ dove $D = \{a, b, c\}$ ed α ̀definita come segue:

$$\alpha(P)(x, y) = \begin{cases} T & \text{se } x = a \text{ e } y = b \text{ oppure } x = a \text{ e } y = c, \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad \alpha(Q)(x) = \begin{cases} T & \text{se } x = a, \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Soluzione La formula è una quantificazione universale (non un'implicazione!!!), pertanto applichiamo la regola (S8) a pagina 38 della dispensa [LP1]. La regola ci dice che la formula è vera in I sse (†) $I_{\rho[d/x]}(Q(x) \Rightarrow (\exists y.P(x, y)))$ è vera per ogni $d \in D = \{a, b, c\}$. Abbiamo quindi tre casi:

($d = a$) Per la regola (S6), l'implicazione è falsa se (a.1) $I_{\rho[a/x]}(Q(x))$ è vera e (a.2) $I_{\rho[a/x]}((\exists y.P(x, y)))$ è falsa. Per la regola (S1), (a.1) $I_{\rho[a/x]}(Q(x)) = Q(\rho[a/x](x)) = Q(a)$, che vale T per ipotesi. Per la regola (S9) (a.2) $I_{\rho[a/x]}((\exists y.P(x, y)))$ è vera se per almeno un elemento $d \in D$ abbiamo che $I_{\rho[a/x][d/y]}(P(x, y))$ è vera. Ma per ipotesi $P(a, b)$ è vera, quindi (a.2) è vera e lo è anche l'implicazione originale.

($d = b$) In questo caso abbiamo che (b.1) $I_{\rho[b/x]}(Q(x)) = Q(\rho[b/x](x)) = Q(b) = F$, e quindi l'implicazione è vera.

($d = c$) Come per ($d = b$).

Poichè l'implicazione (†) è vera per tutti gli elementi del dominio, anche la formula originale è vera.