$$
A^{(i,j)} = \begin{bmatrix}
A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,j-1} & A_{1,j} & A_{1,j+1} & \cdots & A_{1,n} \\
A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,j-1} & A_{2,j} & A_{2,j+1} & \cdots & A_{2,n} \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\
A_{i-1,1} & A_{i-1,2} & \cdots & A_{i-1,j-1} & A_{i-1,j} & A_{i-1,j+1} & \cdots & A_{i-1,n} \\
A_{i,1} & A_{i,2} & \cdots & A_{i,j-1} & A_{i,j} & A_{i,j+1} & \cdots & A_{i,n} \\
A_{i+1,1} & A_{i+1,2} & \cdots & A_{i+1,j-1} & A_{i+1,j} & A_{i+1,j+1} & \cdots & A_{i+1,n} \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\
A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,j-1} & A_{n,j} & A_{n,j+1} & \cdots & A_{n,n}
\end{bmatrix}
$$

Esercizio (corretto)

Scrivere una function `d = determinante(A, i)` che calcola il determinante di una matrice quadrata A con la formula di Laplace sulla i-esima riga

$$\rightsquigarrow \quad \det A = (-1)^{i+1} A_{i,1} \det A^{(i,1)} + \cdots + (-1)^{i+n} A_{i,n} \det A^{(i,n)}.$$

Soluzione di sistemi triangolari

Scriviamo una function x = sup_solve(A, b) che risolve un sistema triangolare superiore.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ & & A_{33} & A_{34} \\ & & & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = \frac{b_4}{A_{44}} \qquad x_3 = \frac{b_3 - A_{34}x_4}{A_{33}} \qquad x_2 = \frac{b_2 - A_{23}x_3 - A_{24}x_4}{A_{22}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}x_j}{A_{ii}}$$

Esempio di sistema triangolare

Sia T_n la matrice $n \times n$ tale che

$$(T_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ -2 & i = j-1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

ad esempio

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} & i{=}1, j{=}2 & & \end{array} \\ T_4 = & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(gli elementi non visualizzati sono 0).

Sistemi triangolari

Esercizio

Per $n = 5, 10, 20, 50$, generate x $=$ rand(n, 1), definite $b = T_n x$, e utilizzate la funzione precedente per risolvere il sistema triangolare $T_n x = b$.

Quanto vale $\frac{\|x - \tilde{x}\|_1}{\|x\|_1}$ per le soluzioni $\tilde{x}$ calcolate dalla nostra funzione? Qual è il numero di condizionamento di T_n in norma 1?

Esercizio

Utilizzando Matlab, determinare l'inversa della matrice T_n per $n = 3, 4, 5$.

Sapreste congetturare una formula generale per l'inversa di T_n? Sapreste dimostrare che questa formula funziona?

$$T_n x = b \qquad T_n = \begin{bmatrix} 1 & -2 & & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -2 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2

Scrivete una function x = sup_solve_T(b) che risolve il sistema triangolare $T_n x = b$. Riuscite a scrivere questa funzione utilizzando $\boxed{O(n)}$ operazioni aritmetiche, senza memorizzare esplicitamente la matrice T_n ma vedendo come sono fatte le formule per questo caso particolare?

Esercizio 1

Scrivete una function x = inf_solve(A, b) che risolve un sistema triangolare *inferiore*.

inf_solve

Utilizzando il comando `triu(ones(n))`, potete generare una matrice triangolare superiore con tutte le entrate nel triangolo uguali a 1:

$$U_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio

Scrivete una function `x = risolvi_sistema(b)` che, dato in input un vettore $b \in \mathbb{R}^n$, calcola la soluzione del sistema lineare $U_n x = b$. Sapreste scrivere questa funzione in modo che abbia costo computazionale $\mathcal{O}(n)$?