Condizionamento ed errori

Qual è il numero di condizionamento di $f(x) = \frac{x}{1-x}$?

$$c_f = \frac{|xf'(x)|}{|f(x)|} = \frac{|x\frac{1-x-(-1)x}{(1-x)^2}|}{|\frac{x}{1-x}|} = \frac{1}{|1-x|}.$$

Condizionamento ed errori

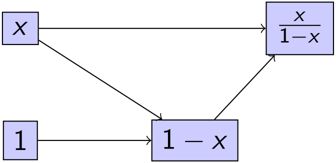
Qual è il numero di condizionamento di $f(x) = \frac{x}{1-x}$?

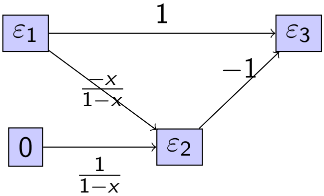
$$c_f = \frac{|xf'(x)|}{|f(x)|} = \frac{|x\frac{1-x-(-1)x}{(1-x)^2}|}{|\frac{x}{1-x}|} = \frac{1}{|1-x|}.$$

Studiamo la stabilità del calcolo di $f(x)$ tramite queste due formule alternative:

- $f_1(x) = \frac{x}{1-x}$
- $f_2(x) = \frac{1}{1-x} - 1$

Metodo 1

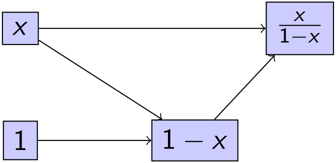


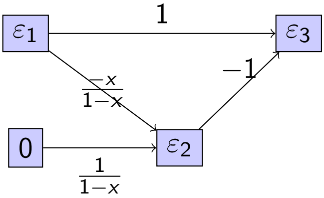


Coefficienti di amplificazione

- $\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}$ se per una somma $a+b$ (o una sottrazione).
- 1 entrambi per un prodotto.
- $1, -1$ per una divisione.

Metodo 1





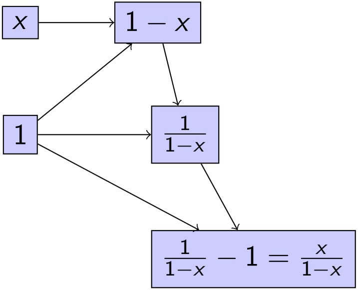
Coefficienti di amplificazione

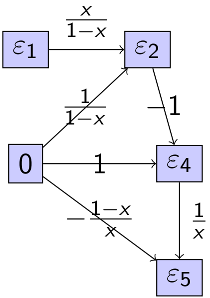
- $\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}$ se per una somma $a + b$ (o una sottrazione).
- 1 entrambi per un prodotto.
- $1, -1$ per una divisione.

$$E_{tot} = \varepsilon_3 + \varepsilon_1 + (-1)\frac{-x}{1-x}\varepsilon_1 + (-1)\varepsilon_2 = \frac{1}{1-x}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Ogni $|\varepsilon_i| \leq \mathbf{u}$, quindi l'errore totale è $\leq \frac{1}{|1-x|}\mathbf{u} + \mathbf{u} + \mathbf{u}$.

Metodo 2





$$E_{tot} = \frac{x}{1-x}(-1)\frac{1}{x}\varepsilon_1 + (-1)\frac{1}{x}\varepsilon_2 + \frac{1}{x}\varepsilon_4 + \varepsilon_5 = \frac{-1}{1-x}\varepsilon_1 - \frac{1}{x}\varepsilon_2 + \frac{1}{x}\varepsilon_4 + \varepsilon_5.$$

Ogni $|\varepsilon_i| \leq \mathbf{u}$, quindi l'errore totale è $\leq \frac{1}{|1-x|}\mathbf{u} + \frac{1}{|x|}\mathbf{u} + \frac{1}{|x|}\mathbf{u} + \mathbf{u}$.

L'errore inerente è il coefficiente di ε_1, in entrambi gli algoritmi; l'errore algoritmico è il resto.

Confronto tra i metodi

Metodo 1 $\frac{1}{|1-x|}\mathbf{u} + \mathbf{u} + \mathbf{u}$

Metodo 2 $\frac{1}{|1-x|}\mathbf{u} + \frac{1}{|x|}\mathbf{u} + \frac{1}{|x|}\mathbf{u} + \mathbf{u}$

Quando $x \approx 1$, tutti e due i metodi hanno un errore grande.
Ce l'aspettavamo, perché la funzione è mal condizionata per $x \approx 1$.
L'errore algoritmico, in realtà, è piccolo per il primo metodo, quindi se x è già un numero di macchina il calcolo è accurato.

Quando $x \approx 0$, il secondo metodo ha un errore grande ma il primo funziona bene.

$\implies$ usiamo il primo metodo, non il secondo!

$$A^{(i,j)} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,j-1} & A_{1,j} & A_{1,j+1} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,j-1} & A_{2,j} & A_{2,j+1} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ A_{i-1,1} & A_{i-1,2} & \dots & A_{i-1,j-1} & A_{i-1,j} & A_{i-1,j+1} & \dots & A_{i-1,n} \\ A_{i,1} & A_{i,2} & \dots & A_{i,j-1} & A_{i,j} & A_{i,j+1} & \dots & A_{i,n} \\ A_{i+1,1} & A_{i+1,2} & \dots & A_{i+1,j-1} & A_{i+1,j} & A_{i+1,j+1} & \dots & A_{i+1,n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,j-1} & A_{n,j} & A_{n,j+1} & \dots & A_{n,n} \end{bmatrix}$$

Esercizio

Scrivere una funzione d = determinante(A) che calcola il determinante di una matrice quadrata A utilizzando la formula ricorsiva

$$\det A = A_{1,1} \det A^{(1,1)} - A_{1,2} \det A^{(1,2)} + \dots \pm A_{1,n} \det A^{(1,n)}.$$