Note Title 2021-03-23

expmac(x,n) $\longrightarrow O(n^2)$ ($\leq Cn^2$ per qualche C)

expmac2(x,n) $\longrightarrow O(n)$ ($\leq Cn$ per qualche C)

$f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ $\qquad x = 0.999$

$\tilde{x} = x + \varepsilon$ $\qquad \tilde{x} = x + 0.0001 = 0.9991$

$f(\tilde{x}) - f(x)$

Per avere >>f(x) funzionante in Matlab dovrei creare un file f.m. contenente una function

oppure per funzioni fatte solo con una formula posso usare le sintassi

f = @(x) x/(1-x);

somma = @(a,b) a+b;

>> somma(3,4)

$x = 0.999 \qquad \tilde{x} = 0.9991$

$f(x) = 999 \qquad f(\tilde{x}) = 1110{,}1$

errore relativo su x $\qquad \dfrac{|\tilde{x}-x|}{|x|} = \dfrac{0.001}{0.999} \approx 1 \cdot 10^{-4}$

errore rel. su $f(x)$: $\qquad \dfrac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|} \approx 0.1122$

numero di condizionamento di f:

$$\mathrm{cond}(f,x) = \frac{|f'(x) \cdot x|}{|f(x)|}$$

$$f(x) = \frac{x}{1-x} \qquad f'(x) = \frac{1 \cdot (1-x) - (-1) \cdot x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\mathrm{cond}(f,x) = \frac{|f'(x) \cdot x|}{f(x)} = \frac{\frac{1}{(1-x)^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{x}}{\cancel{\frac{x}{1-x}}} = \frac{1}{1-x}$$

$$\underbrace{\frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|}}_{0.1122} = \underbrace{\mathrm{cond}(f,x)}_{10^3} \cdot \underbrace{\frac{|\tilde{x}-x|}{|x|}}_{0.0001001} + \underbrace{O\left(\left(\frac{|\tilde{x}-x|}{|x|}\right)^2\right)}_{10^{-8}}$$

Scrivendo $x = 0.999$, Matlab non salva

esattamente questo valore, ma una sua

approssimazione $\tilde{x} = 0.999(1+\varepsilon) \qquad |\varepsilon| \leq u$

$$\frac{|\tilde{x}-x|}{|x|} = \frac{|0.999(1+\varepsilon)-0.999|}{|0.999|} = |\varepsilon|$$

Matlab non può calcolare $f(x)$,

ma al più $f(\tilde{x})$

$$\frac{|f(\tilde{x})-f(x)|}{|f(x)|} = \underbrace{\frac{|\tilde{x}-x|}{|x|}}_{\substack{\| \\ |\varepsilon| \\ \wedge\| \\ u}} \cdot \underbrace{\text{cond}(f,x)}_{10^3}$$

Norme vettoriali:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \|x\|_\infty = \max |x_i| = 3$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad \|y\|_1 = |y_1| + |y_2| + \dots + |y_n| = 6$$

$$\|y\|_2 = \sqrt{|y_1|^2 + \dots + |y_n|^2}$$

Norme matriciali: $\boxed{\|A\|_1 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_1}$

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty$$

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$$

Formula per $\|A\|_\infty$: $\max_{i=1..n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right\| = \max(6,6,6) = 6$$

(raggiunta con $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Formula per $\|A\|_1$: $\max_{j=1..n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right\|_1 = \max(3,6,9) = 9$$

Formula per $\|A\|_2$: $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$

"raggio spettrale"

In Matlab, eig(A' * A) calcola

questi comandi

1) eig (sta per "eigenvalue")

2) ' (apice) = trasposta

A \ b → calcola soluzione di $Ax = b$

Mnemonica

$x = A^{-1} b$ è "simile a" $\cancel{\dfrac{b}{A}}$ $\quad A \setminus b$

A sta sotto

A sta sopra $\quad A / b$

errore relativo (in norma-∞) $\dfrac{\|\tilde{b} - b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$

Prendo la soluzione $\tilde{x}$ del sistema lineare

$A\tilde{x} = \tilde{b}$

Quanto vale $\dfrac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$?

Teo: vale per ogni norma vettoriale

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq k(A) \frac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|} \cancel{+ O(u^2)}$$

$5 \cdot 10^{-2}$ $\quad$ 21 $\quad$ $2.56 \cdot 10^{-3}$

$$k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

norma indotta della norma vett. scelta

Matlab:

cond(A, tipo)

inv(A)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4+10^{-12} \end{bmatrix}$$

(piccola perturbazione di $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, che è singolare)

$$\det(C) = 4+10^{-12} - 2 \cdot 2 = 10^{-12}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq k(C) \cdot \frac{\|\tilde{b} - b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

$9.99 \cdot 10^{10}$ $\quad$ $3.6 \cdot 10^{13}$ $\quad$ $2.94 \cdot 10^{-3}$

$\tilde{x}$ che risolve $C\tilde{x} = \tilde{b}$

Formula di Laplace per il determinante: (di una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

Fissata una riga i,

$$\det(A) = \sum_j (-1)^{i+j} \cdot \det\left(A^{(i,j)}\right)$$

dove $A^{(i,j)}$ è la matrice ottenuta rimuovendo la i-esima riga e la j-esima colonna da A

function determinante(A) ricorsiva!

... determinante(B) ...