Scrivere una funzione `L = matrice3(n)` che crea questa matrice.

Matrice di esempio

$$(L_n)_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{se } i = j, \\ -1 & \text{se } |i-j| = 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$L_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ad esempio, } L_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Scrivere una funzione `w = prodottoL(v)` che calcola il prodotto $w = L_n v$, dato un vettore $v \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

Utilizzando il comando di Matlab `L * v`, il prodotto costa $\mathcal{O}(n^2)$ operazioni aritmetiche (perché?). È possibile scrivere questa funzione in modo che utilizzi $\mathcal{O}(n)$ operazioni aritmetiche?

$$A^{(i,j)} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,j-1} & A_{1,j} & A_{1,j+1} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,j-1} & A_{2,j} & A_{2,j+1} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ A_{i-1,1} & A_{i-1,2} & \dots & A_{i-1,j-1} & A_{i-1,j} & A_{i-1,j+1} & \dots & A_{i-1,n} \\ A_{i,1} & A_{i,2} & \dots & A_{i,j-1} & A_{i,j} & A_{i,j+1} & \dots & A_{i,n} \\ A_{i+1,1} & A_{i+1,2} & \dots & A_{i+1,j-1} & A_{i+1,j} & A_{i+1,j+1} & \dots & A_{i+1,n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,j-1} & A_{n,j} & A_{n,j+1} & \dots & A_{n,n} \end{bmatrix}$$

Esercizio

Scrivere una funzione d = determinante(A) che calcola il determinante di una matrice quadrata A utilizzando la formula ricorsiva

$$\det A = A_{1,1} \det A^{(1,1)} - A_{1,2} \det A^{(1,2)} + \cdots \pm A_{1,n} \det A^{(1,n)}.$$