Valutazione di polinomi

Esercizio

Scrivere una funzione `y = ruffinihorner(v, x)` che, dati in input un vettore $v \in \mathbb{R}^{1\times(d+1)}$ contenente i coefficienti del polinomio

$$p(t) = v_1 t^d + v_2 t^{d-1} + \cdots + v_d t + v_{d+1}$$

e $x \in \mathbb{R}$, calcola $y = p(x)$ con il metodo di Ruffini–Horner.

Controllare se questa funzione ha il comportamento corretto testandola sul polinomio $p(x) = x^3 - 3x - 1$.

Metodo di Newton

Esercizio

Scrivere una funzione `x = newtonmethod(v, m, x0)` che, dati in input un vettore $v \in \mathbb{R}^{1\times(d+1)}$ contenente i coefficienti del polinomio $p(t)$, utilizza il metodo di Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{p(x_k)}{p'(x_k)}$$

per calcolare α tale che $p(\alpha) \approx 0$, arrestandosi dopo m passi. La funzione dovrà restituire il vettore delle iterate prodotte $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_m]$.

Usando il risultato della funzione, tracciare un grafico dell'errore $|x_k - \alpha|$ in funzione di k (possibilmente in scala logaritmica per osservarne meglio il comportamento).

Usando come α l'ultimo elemento del vettore x, calcolare il valore delle quantità $\frac{|x_k-\alpha|}{|x_k-\alpha|^2}$ al variare di k. Questo comportamento corrisponde al comportamento di convergenza atteso dal metodo?

Un caso particolare

Quali valori $x_0, x_1, x_2, \dots$ produce la nostra funzione se la eseguiamo sul polinomio $p(x) = x^3 - 3x - 1$, con valore iniziale $x_0 = 1$? Calcolate anche esattamente (con carta e penna) che il comportamento osservato coincide con quello teorico.

Cosa consentono di concludere sulla convergenza del metodo i teoremi dimostrati a lezione? Per quali valori iniziali x_0 ci attendiamo convergenza?