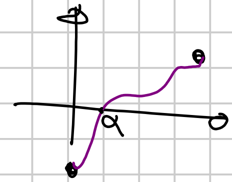
• Data $f(x)=x^2-2$, mostrare che $f(x)=0$ ha $\boxed{\text{UNA}}$ soluz. in $[0,2]$

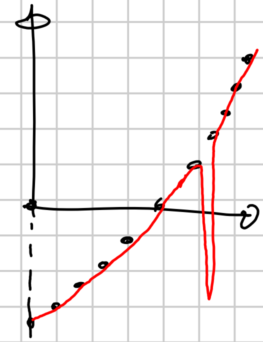
1) Poiché f è continua, $f(0)=-2<0$, $f(2)=2>0$

allora deve esistere $\alpha\in[0,2]$ t.c. $f(\alpha)=0$



È *esattamente* uno?

Dobbiamo escludere



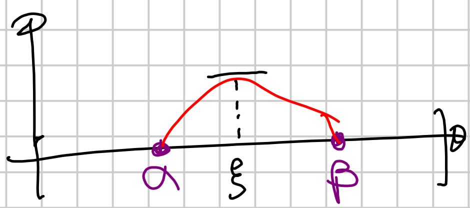
$f'(x)=2x\geq 0$ in $[0,2]$

(e vale 0 **solo** se $x=0$)

Quindi c'è solo un punto α t.c. $f(\alpha)=0$.

assurdo!

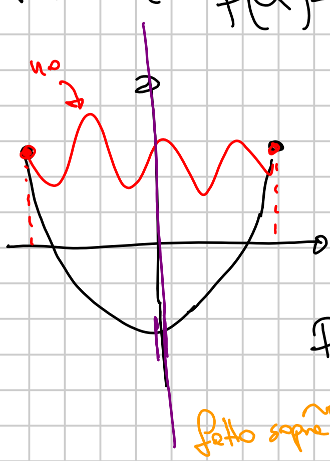
Se ne avessi due,



per il teorema di Rolle avrei $\xi\in(\alpha,\beta)$ **aperto** t.c. $f'(\xi)=0$.

(Se avessimo avuto $f'(x)>0$ in tutto l'intervallo, potevamo concludere più facilmente, senza dover osservare che 0 sta a un estremo).

• Dimostrare che esistono *esattamente* due punti (distinti) α,β in $[-2,2]$ tali che $f(\alpha)=f(\beta)=0$



Notare che $f(-2)=2>0$

$f(2)=2>0$

ma da qui non posso concludere nulla!

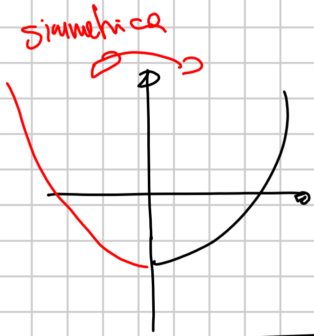
Posso dividere l'esercizio in 2:

• dimostro che f ha esattamente un α t.c. $f(\alpha)=0$ in $[0,2]$ fatto sopra

• dim. che f ha esattam. un β t.c. $f(\beta)=0$ in $[-2,0]$

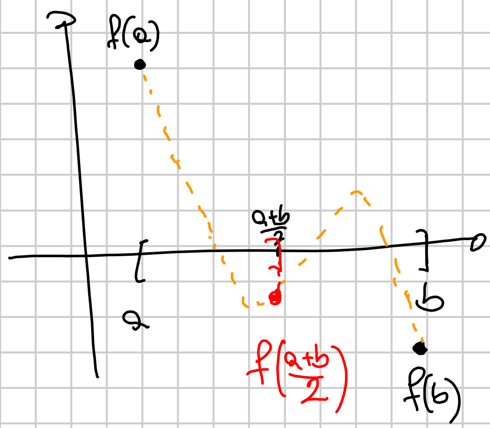
esattamente uguale: $f(-2)$ e $f(0)$ hanno segni opposti $\to$ esiste β

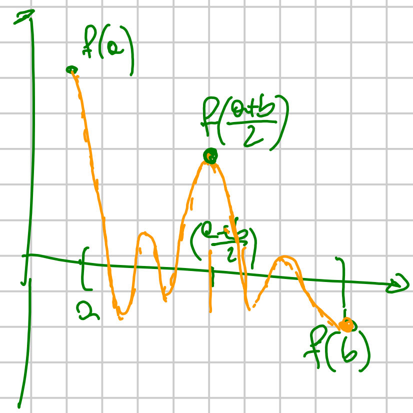
$f'(x) \leq 0$ (decrescente), quindi c'è uno zero solo.



Metodo di bisezione:

Dato un intervallo $[a_0, b_0]$ e una f continua tale che $f(a)\,f(b) \leq 0$,





Calcolo $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$; a seconda del suo segno, uno dei due intervalli

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$ sarà tale che la f assume

segni opposti ai due estremi. Lo chiamo $[a_1, b_1]$. Reitero.

Bisezione: $m = \frac{a+b}{2}$

if $f(a) \cdot f(m) \leq 0$

$a_1 = a$

$b_1 = m$

else

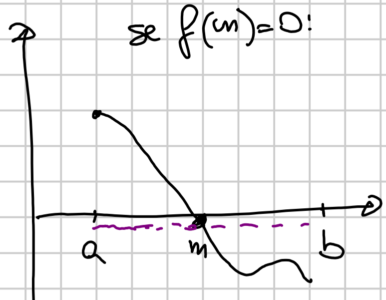
$a_1 = m$

$b_1 = b$

end

⚠ occhio a cosa succede se $f(a)\,f(m) = 0$

se $f(m) = 0$:



$f(a)f(m) \leq 0 \qquad f(m)f(b) \leq 0$

Occhio che rimpiazzare $\leq$ con $<$ non funziona:

if $f(a)f(m) < 0$

$a_1 = a$

$b_1 = m$

else

$a_1 = m$

$b_1 = b$

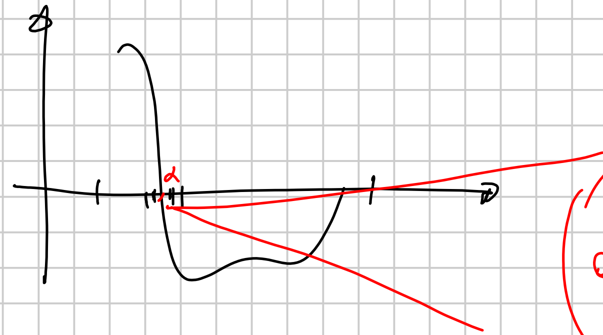
end

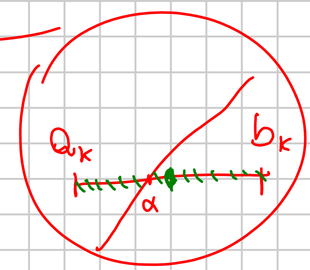
Se $f(a) = 0$: $f(a)f(b) \leq 0$

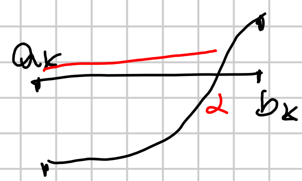
$f(a)f(m) \leq 0$

no!

$f(m)f(b) > 0$





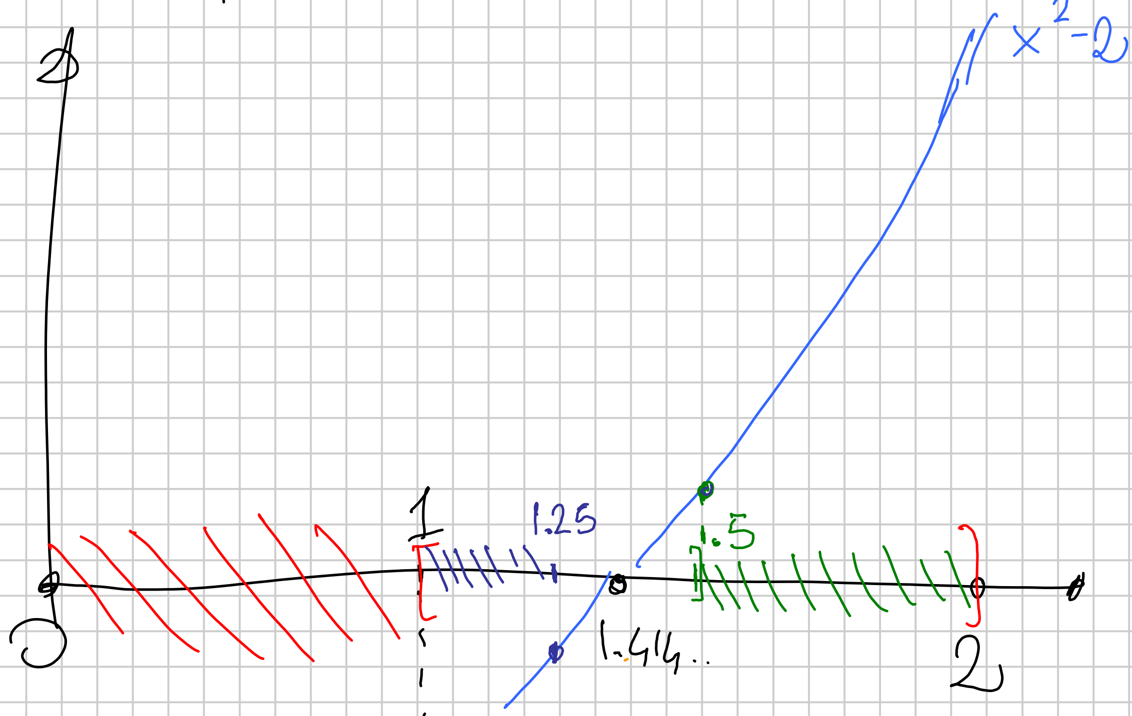


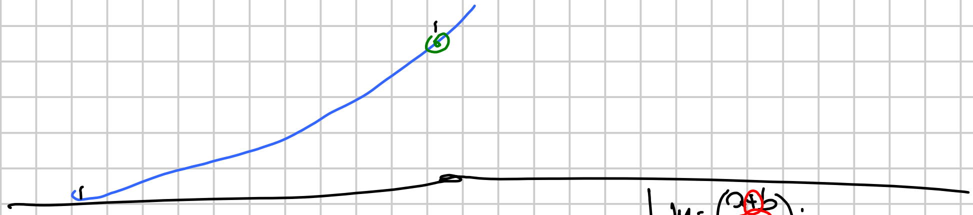
Restituisco $m_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$;

$$|m_k - \alpha| \leq \frac{|b_k - a_k|}{2}$$

$x^2 - 2 = 0 \qquad x^2 = 2 \qquad x = \pm\sqrt{2}$

$\alpha = \sqrt{2} = 1,414\ldots$





Costo computazionale di

```
for i=1:k
    [a,b]=bisezione step(f,a,b)
end
```

$m=\frac{a+b}{2}$

$m = \frac{(a+b)}{2}$;

$\boxed{f(a)} * \boxed{f(m)} \leq 0$

$\boxed{3 \text{ ops}}$ + 2 valutazioni di funzione

→ 2K valutazioni di funzione

$O(k)$ $2K + O(1)$

Esempio con $\sqrt{2}$ su $[0,2]$

$[0,2]$	Iterazione 1 :	$f(0)$	$f(1)$	2 val.
$[1,2]$	Iterazione 2 :	$f(1)$	$f(1.5)$	
$[1,1.5]$	It. 3 :	$f(1)$	$f(1.25)$	
$[1.25,1.5]$	It. 4 :	$f(1.25)$	$f(1.375)$	

Seconda versione: mi salvo ad ogni passo f_a, f_m

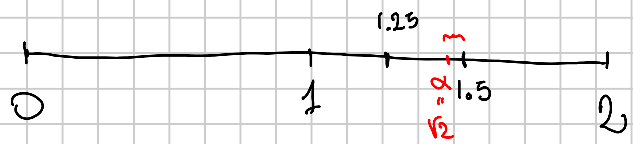
```
fa=f(a)   fb=f(b)
for i=1:k
    m=(a+b)/2;
    fm=f(m)        <- punto nuovo
    if fa * fm <= 0
        b=m;
        fb=fm;
    else
        a=m;
        fa=fm;
    end
end
```

costo computazionale

$2+K$ valutazioni di funzione

$O(k)$ $K+O(1)$

$\left|\alpha - \frac{a_k+b_k}{2}\right|$ scende (circa, ma non ad ogni passo!)



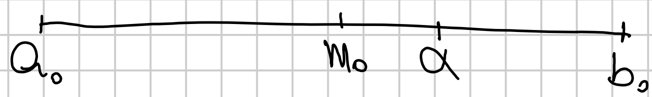
$m_1 = 1 \quad |\sqrt{2} - 1| \approx 0.414$

$m_2 = 1.5 \quad |\sqrt{2} - 1.5| \approx 0.084$

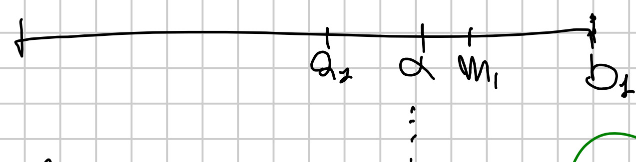
$m_3 = 1.25 \quad |\sqrt{2} - 1.25| \approx 0.16$

Al passo 0,

$$|\alpha - m_0| \leq \frac{|b_0 - a_0|}{2}$$

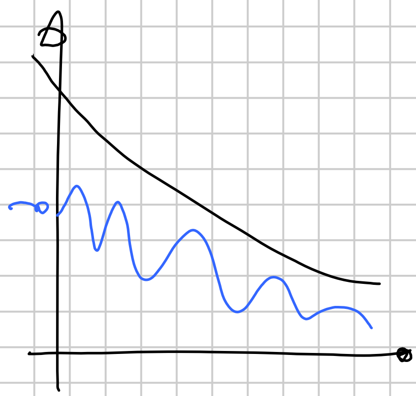


Al passo 1,



$$|\alpha - m_1| \leq \frac{|b_1 - a_1|}{2} \leq \frac{|b_0 - a_0|}{4}$$

$$|\alpha - m_k| \leq \frac{|b_0 - a_0|}{2 \cdot 2^k}$$



Altri criteri di arresto?