Metodi di Jacobi e Gauss-Seidel

Note Title 2020-04-28

$Ax=b$ scelgo M, N t.c. $A = M-N$, M invertibile

$\Updownarrow$

$$x = \underbrace{M^{-1}N}_{P}x + \underbrace{M^{-1}b}_{q} \qquad \boxed{x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q}$$

Jacobi: $M = D$ (elementi diagonali di A) $M = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$

Gauss-Seidel: $M = D+L$ (elementi diagonali e sottodiag. di A) $M = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b \iff Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$$

$n=4$ x_new Jacobi x_old

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ & & & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ x_4^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ x_4^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\cancel{a_{11}} x_1^{(k+1)}}{\cancel{a_{11}}} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - a_{14}x_4^{(k)}}{a_{11}}$$

$i = 1, \dots n$

$$(J) \rightsquigarrow \frac{\cancel{a_{ii}}\, x_i^{(k+1)}}{\cancel{a_{ii}}} = \frac{b_i - a_{i1}x_1^{(k)} - a_{i2}x_2^{(k)} - \dots - a_{i,i-1}^{(k)}x_{i-1}^{(k)} - a_{i,i+1}^{(k)}x_{i+1}^{(k)} - \dots - a_{in}x_n^{(k)}}{a_{ii}}$$

Tengo in memoria 2 variabili: x_new x_old

Criterio di arresto: $\|Ax^{(k)} - b\|_1 \leq \varepsilon$

oppure $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_1 \leq \varepsilon$

ciclo for:

1ª iterazione: x_old $= x^{(0)}$ x_new $= x^{(1)}$

2ª iterazione: x_old $= x^{(1)}$ x_new $= x^{(2)}$

Teo: un metodo it. converge $\iff$ raggio spettrale di P è < 1

Teo: un metodo it. converge $\Leftarrow$ $\|P\| < 1$

$\rho(P_1) < 1$ ✓ $\qquad \rho(P_3) > 1$ ✓

Gauss-Seidel $\qquad Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b \qquad A = M - N \qquad N = M - A$

$(n=4)$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ x_4^{(k+1)} \end{bmatrix}}_{x\_new} = \underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ 0 & 0 & -a_{23} & -a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{noto}}_{N = M - A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ x_4^{(k)} \end{bmatrix}}_{x\_old} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$a_{11} x_1^{(k+1)} = b_1 - a_{12} x_2^{(k)} - a_{13} x_3^{(k)} - a_{14} x_4^{(k)}$ $\qquad$ ricavo $x_1^{(k+1)}$

$a_{21} x_1^{(k+1)} + a_{22} x_2^{(k+1)} = b_2 - a_{23} x_3^{(k)} - a_{24} x_4^{(k)}$ $\qquad$ ricavo $x_2^{(k+1)}$

$a_{31} x_1^{(k+1)} + a_{32} x_2^{(k+1)} + a_{33} x_3^{(k+1)} = b_3 - a_{34} x_4^{(k)}$ $\qquad$ ricavo $x_3^{(k+1)}$

$\vdots$

sto risolvendo $Mx^{(k+1)} = \text{noto}$ per sostituzione in avanti!

Eq. i-esima: $\qquad i = 1, \dots n$

$$\underbrace{a_{i1} x_1^{(k+1)} + a_{i2} x_2^{(k+1)} + \dots}_{\text{noti}} + a_{ii} x_i^{(k+1)} = b_i - a_{i\,i+1} x_{i+1}^{(k)} - a_{i\,i+2} x_{i+2}^{(k)} - \dots - a_{in} x_n^{(k)}$$

$\Updownarrow$

$$(GS) \quad x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \overset{new}{a_{i1} x_1^{(k+1)}} - \dots - \overset{new}{a_{i\,i-1} x_{i-1}^{(k+1)}} - \overset{old}{a_{i\,i+1} x_{i+1}^{(k)}} - \overset{old}{a_{i\,i+2} x_2^{(k)}} - \dots - \overset{old}{a_{in} x_n^{(k)}}}{a_{ii}}$$

Se so $x_1^{(k+1)}, \dots x_{i-1}^{(k+1)}$ dalle formule precedenti, posso ricavare $x_i^{(k+1)}$ da questa formula.

```
for i = 1:n
    x_new(i) = .... formula (contiene elem. di x_old e di x_new
end
```

Unica differenza tra (J) e (GS) sono gli indici (k+1) a destra dell'uguale

---

Metodo di Gauss-Seidel:

Passo $i=1$ $\quad$ Uso x_old(2) ... x_old(n), calcolo x_new(1)

$i=2$ $\quad$ Uso x_new(1), x_old(3), ... x_old(n), calcolo x_new(2)

$i=3$ $\quad$ Uso x_new(1), x_new(2), x_old(4) ... x_old(n), calcolo x_new(3)

$\vdots$

Posso implementare G-S con una sola variabile x anziché x_new, x_old:

$$x = \begin{bmatrix} x_1^{old} \\ x_2^{old} \\ x_3^{old} \\ \vdots \\ x_n^{old} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{passo } i=1} \begin{bmatrix} x_1^{new} \\ x_2^{old} \\ x_3^{old} \\ \vdots \\ x_n^{old} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{passo } i=2} \begin{bmatrix} x_1^{new} \\ x_2^{new} \\ x_3^{old} \\ \vdots \\ x_n^{old} \end{bmatrix} \xrightarrow{i=3} \begin{bmatrix} x_1^{new} \\ x_2^{new} \\ x_3^{new} \\ x_4^{old} \\ \vdots \\ x_n^{old} \end{bmatrix} \rightarrow \xrightarrow{\text{passo } i=n} \begin{bmatrix} x_1^{new} \\ \vdots \\ x_n^{new} \end{bmatrix} = x^{new}$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & 0 & \beta_1 \\ & \alpha_2 & & \beta_2 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & \beta_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots \gamma_n & \alpha_n \end{bmatrix}$$

Jacobi

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} x_1^{(new)} \\ x_2^{(new)} \\ \vdots \\ x_n^{(new)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & -\beta_1 \\ & & -\beta_2 \\ & & \vdots \\ & & -\beta_{n-1} \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \cdots & -\gamma_{n-1} \; 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(old)} \\ x_2^{(old)} \\ \vdots \\ x_n^{(old)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} i=1 \quad & x_1^{new} = \frac{b_1 - \beta_1 x_n^{(old)}}{\alpha_1} \\ i=2 \quad & x_2^{new} = \frac{b_2 - \beta_2 x_n^{(old)}}{\alpha_2} \\ & \vdots \\ i=n-1 \quad & x_{n-1}^{new} = \frac{b_{n-1} - \beta x_{n-1}^{(old)}}{\alpha_{n-1}} \end{aligned}\right\} \text{3 op per ognuna delle prime } n-1 \text{ righe}$$

$$i=n \quad x_n^{(new)} = \frac{b_n - \gamma_1 x_1^{old} - \gamma_2 x_2^{old} - \dots - \gamma_{n-1} x_{n-1}^{old}}{\alpha_n}$$

} $n-1$ prodotti, $n-1$ sottraz. 1 segmento

$\Rightarrow O(n)$ per passo

(anziché $O(n^2)$ su una matrice generica)

Potete provare a scrivere un metodo di Jacobi (o G-S) per matrici a freccia

function $x = \text{jacobi}(\underbrace{\alpha, \beta, \gamma}_{\text{definiscono } A}, b, x_0, eps)$.

Come possiamo testarlo?

Controlliamo che produca un x t.c. $\|Ax-b\|$ è piccolo (circa eps)

Come facciamo a essere sicuri che converga? Basta prendere A pred. diag.

⚠ I teoremi dicono se il <u>metodo</u> converge o no

"Il metodo converge" $\Leftrightarrow$ le successioni ottenute con <u>qualunque</u> x_0 convergono

"Il metodo <u>non</u> converge" $\Leftrightarrow$ non tutte le successioni ottenute con qualunque x_0 convergono.

⚠ Possono comunque esistere scelte particolari di $x^{(0)}$ per cui la successione $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots$ converge!

Esistono scelte speciali di $x^{(0)}$ con cui si ha comunque convergenza

<u>ES</u>: se io scelgo $x^{(0)} = x$ (soluzione di $Ax=b$), allora $x = x^{(0)} = x^{(1)} = x^{(2)} = \dots$