$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ & 1 & -1 & & \\ & & 1 & -1 & \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & & & & -1 \\ p & & & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$n=4 \qquad A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & -1 \\ p & & & 1 \end{bmatrix} \qquad [1] = A_1 \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad A_4 = A$$

Teo: Se le sottomatrici principali di testa $A_1, A_2, \dots A_{n-1}$ sono invertibili, allora A ammette fattorizzazione LU (unica)

1. Le sottomatrici principali di A sono tutte triang. superiori con 1 sulla diagonale, quindi sono invertibili (ad es. perché $\det(A_k) = 1\cdot 1 \cdots 1 = 1$) (per $k=1, \dots n-1$)

(A non è triangolare, ma non ci interessa)

2.
$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1+p \end{bmatrix} \qquad (n=4) \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1+p \end{bmatrix}$$

Idea: usiamo la tecnica della dim. di esistenza e unicità.

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{n-1} & x \\ \hline y^T & \beta \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} L_{n-1} & 0 \\ \hline w^T & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} U_{n-1} & z \\ \hline 0 & \gamma \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} L_{n-1}\cdot U_{n-1} + \cancel{0\cdot 0} & L_{n-1}\cdot z + \cancel{0\cdot\gamma} \\ \hline w^T U_{n-1} + \cancel{1\cdot 0} & w^T z + 1\cdot\gamma \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} A_{n-1} = L_{n-1} U_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\ x = L_{n-1} z = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ y^T = w^T U_{n-1} = [p\ 0\ 0 \dots 0] \\ \beta = w^T z + \gamma = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow L_{n-1}, U_{n-1}$ sono i fattori della fatt. LU di $\begin{bmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & \ddots & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

$$= \underbrace{I}_{\text{matrice } L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & \ddots & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{\text{matrice } U}$$

$$\Rightarrow L_{n-1} = I, \quad U_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$z = L_{n-1}^{-1} x = I^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$y^T = w^T U_{n-1}$$

$$y^T U_{n-1}^{-1} = w^T \underbrace{U_{n-1} U_{n-1}^{-1}} = w^T \qquad w^T = y^T U_{n-1}^{-1} = [p\ 0\ 0 \cdots 0] \begin{bmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & \ddots & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Per risolvere quest'ultimo sistema lineare, usiamo sostituzione in avanti

$$[\rho\ 0\ 0\ \cdots\ 0] = [w_1\ w_2\ w_3\ \cdots\ w_{n-1}]\begin{bmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & 1 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$\rho = w_1$ (I^a colonna) $\Rightarrow$ $w_1 = \rho$

$0 = -w_1 + w_2$ (II^a colonna) $\Rightarrow$ $w_2 = \rho$

$0 = -w_2 + w_3$ (III^a colonna) $\Rightarrow$ $w_3 = \rho$ $\qquad w = [\rho\ \rho\ \rho\ \cdots\ \rho]$

$0 = -w_3 + w_4$

$\vdots$

$0 = -w_{n-2} + w_{n-1}$ ($n-1$-esima colonna) $\qquad w_{n-1} = \rho$

$$w^T z + \gamma = \beta = 1 \Rightarrow \gamma = \beta - w^T z = 1 - [\rho\ \rho\ \rho\ \cdots\ \rho]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 + \rho$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & & 0 & 0 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & -1 & \\ 0 & & & 1 & -1 \\ \hline \rho & & 0 & & 1 \end{array}\right]}_{A} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \hline \rho & \rho & \rho\ \rho \cdots & \rho & 1 \end{array}\right]}_{L} \cdot \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & & & 0 \\ & 1 & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & -1 & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \\ & & & & -1 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1+\rho \end{array}\right]}_{U}$$

Alternativamente: Matlab suggerisce che

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}^{-1} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & & & \vdots \\ & & \ddots & & 1 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$ e quindi

$$w^T = [\rho\ 0\ 0\ \cdots\ 0]\begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}^{-1} \overset{?}{=} [\rho\ \rho\ \rho\ \cdots\ \rho]$$

e quindi

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & -1 & \\ & & & 1 & -1 \\ \hline \rho & 0 & 0 \cdots & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{?}{=} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ \hline \rho & \rho & \rho \cdots & \rho & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -1 \\ \hline 0 & \cdots & & 0 & 1+\rho \end{array}\right]$$

Questa uguaglianza è vera? Facciamo il prodotto!

Le prime $n-1$ righe di L sono quelle dell'identità, quindi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ \hline \rho & \rho\ \rho \cdots & \rho & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & -1 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1+\rho \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1 \\ \hline \underset{-\rho+\rho}{\rho} & 0\ 0 \cdots & \underset{-\rho+\rho}{0} & \underset{-\rho+(1+\rho)}{1} \end{array}\right] = A \checkmark$$

3. La fatt. LU è unica per ogni $\rho \in \mathbb{R}$, per lo stesso teorema del pt. 1.

4. (Vedi Matlab)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ & 1 & -1 & & \\ & & 1 & -1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -1 \\ 0 & & & & 1+\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$z_1 - z_2 = 1 \Rightarrow z_1 = z_2 + 1$

$z_2 - z_3 = 1 \Rightarrow z_2 = z_3 + 1$

$\vdots$

$\to z_{n-2} - z_{n-1} = 1 \Rightarrow z_{n-2} = z_{n-1} + 1$

$\to z_{n-1} - z_n = 1 \Rightarrow z_{n-1} = z_n + 1 = 1 + \frac{1}{1+\rho}$

$\to (1+\rho) z_n = 1 \Rightarrow z_n = \frac{1}{1+\rho}$

```
function z = risolviU(n, rho)
z = zeros(n,1)              ← 0 ops
z(n) = 1 / (1 + rho);       ← 2 ops
for k = n-1 : -1 : 1
    z(k) = z(k+1) + 1       ← 1 op } ripetuta n-1 volte
end
```

$$z = \begin{bmatrix} n-1+\frac{1}{1+\rho} \\ \vdots \\ 3+\frac{1}{1+\rho} \\ 2+\frac{1}{1+\rho} \\ 1+\frac{1}{1+\rho} \\ \frac{1}{1+\rho} \end{bmatrix}$$

Costo totale: $(n-1)\cdot 1 + 2 = n+1$ ops

$n + O(1)$

$O(n)$

6.

x = [n-1:-1:1]' + 1/((1+rho) * ones(n,1))

$$z = \begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \\ n-3 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{1+\rho} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

6.

n	errore
200	0
400	0
800	0

Esercizio dalle slide:

$$\begin{bmatrix} 1 & - & - & - & 1 \\ & 1 & & & \vdots \\ & & 1 & & \vdots \\ 0 & & & \ddots \; 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{da trovare}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}}_{\text{dato}}$$

$x_k + x_{k+1} + \dots + x_n = b_k \quad b_k = x_k - (x_{k+1} + \dots + x_n)$

$\vdots$

$\to x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = b_{n-2} \Rightarrow x_{n-2} = b_{n-2} - x_{n-1} - x_n$

$\to x_{n-1} + x_n = b_{n-1} \Rightarrow x_{n-1} = b_{n-1} - x_n$

$\to x_n = b_n$

passo k: $\quad x_k = b_k - \underbrace{(x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_n)}_{\text{somma}}$

passo $k-1$: $\quad x_{k-1} = b_k - (x_k + \underbrace{x_{k+1} + \dots + x_n}_{\text{somma al passo prec.}})$

```
function x= risolviU2(b)
n= length(b)
x=zeros(n,1)
x(n)=b(n)
for k= n-1:-1:1
    somma=0;
    for j=k+1:n
        somma = somma + x(j)
    end
    x(k)=b(k)-somma;
end
```

costo computazionale:

0

0

0

$(n-1)$

qui somma vale $x(k+2)+x(k+3)+\ldots+x(n)$

$k=n-1$ $k=n-2$ $k=n-3$

1 $(1+2+3+\ldots+n-1)$ volte $=\boxed{\frac{(n-1)n}{2}}$

1 $(n-1)$ volte $+$ $\boxed{\approx \frac{n^2}{2}+O(n)}$

Costo di questo programma: $\frac{n^2}{2}+O(n)$ operazioni

$+n-1$

Riuscite a risolvere il problema con un programma dal costo di $O(n)$ operazioni aritmetiche?

```
x(n) = b(n)
somma = x(n)  0
for k= n-1:-1:1
    somma + x(k+1)
    x(k)= b(k) - somma
end
```

2 ops $(n-1)$

Costo: $2(n-1)=2n+O(1)$

$x(n) \leftarrow b(n)$

somma $\leftarrow$ ~~x(n)~~ 0

$\boxed{k=n-1}$

somma $\leftarrow$ ~~x(n)~~ 0 $+ x(n)$

$x(n-1) \leftarrow b(n-1) - x(n)$

$\boxed{k=n-2}$

somma $\leftarrow x(n)+x(n-1)$

$x(n-2) \leftarrow b(n-2)-(x(n-1)+x(n))$

$A(1:k,\ 1:k)$

Sintassi Matlab: $A(m:n,\ p:q)$ = sottomatrice fatta con le righe dalla m alla n di A e le colonne dalla p alla q (estremi inclusi)