Scrivere una funzione `A = matrice(n)` che crea la versione $n \times n$ di questa matrice.

Matrice di esempio

$$(A_n)_{i,j} = i + j$$

$$A_n = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 & \dots & 1+n \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 & \dots & 2+n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & n+n \end{bmatrix}$$

$$\text{ad esempio, } A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Per casa: sapreste creare matrici del tipo $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{smallmatrix}\right]$?

Scrivere una funzione `C = matrice2(n)` che crea la versione $n \times n$ di questa matrice.

Matrice di esempio

$$(C_n)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j, \\ \frac{1}{i-j} & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

$$C_n = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{1-2} & \frac{1}{1-3} & \cdots & \frac{1}{1-n} \\ \frac{1}{2-1} & 0 & \frac{1}{3-2} & \cdots & \frac{1}{2-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \frac{1}{n-3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ad esempio, } C_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Scrivere una funzione `L = matrice3(n)` che crea questa matrice.

Matrice di esempio

$$(L_n)_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{se } i = j, \\ -1 & \text{se } |i-j| = 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$L_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ad esempio, } L_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Scrivere una funzione `w = prodottoL(v)` che calcola il prodotto $w = L_n v$, dato un vettore $v \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

Utilizzando il comando di Matlab `L * v`, il prodotto costa $\mathcal{O}(n^2)$ operazioni aritmetiche (perché?). È possibile scrivere questa funzione in modo che utilizzi $\mathcal{O}(n)$ operazioni aritmetiche?

$$
A^{(i,j)} = \begin{bmatrix}
A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,j-1} & A_{1,j} & A_{1,j+1} & \dots & A_{1,n} \\
A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,j-1} & A_{2,j} & A_{2,j+1} & \dots & A_{2,n} \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\
A_{i-1,1} & A_{i-1,2} & \dots & A_{i-1,j-1} & A_{i-1,j} & A_{i-1,j+1} & \dots & A_{i-1,n} \\
A_{i,1} & A_{i,2} & \dots & A_{i,j-1} & A_{i,j} & A_{i,j+1} & \dots & A_{i,n} \\
A_{i+1,1} & A_{i+1,2} & \dots & A_{i+1,j-1} & A_{i+1,j} & A_{i+1,j+1} & \dots & A_{i+1,n} \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\
A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,j-1} & A_{n,j} & A_{n,j+1} & \dots & A_{n,n}
\end{bmatrix}
$$

Esercizio

Scrivere una funzione d = determinante(A) che calcola il determinante di una matrice quadrata A utilizzando la formula ricorsiva

$$\det A = A_{1,1} \det A^{(1,1)} - A_{1,2} \det A^{(1,2)} + \cdots \pm A_{1,n} \det A^{(1,n)}.$$

Esercizio

Scrivere una function `H = hilbert(n)` che crea la *matrice di Hilbert* di dimensione $n \times n$, cioè la matrice

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \qquad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \qquad H_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix},$$

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \ddots & & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}.$$

Esercizio

Tracciare un grafico di `cond(hilbert(n))` in funzione di n per $n = 1, 2, \ldots, 30$. Disegnarlo non solo con `plot(n, c)` ma anche con `semilogy(n, c)` (scala logaritmica sull'asse y).