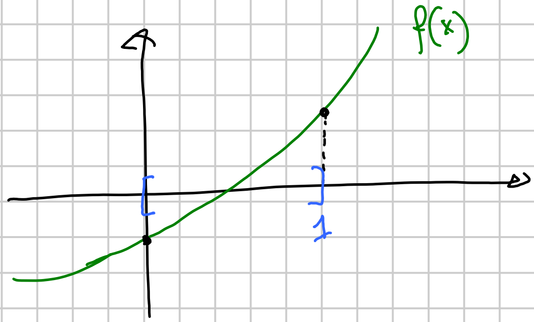
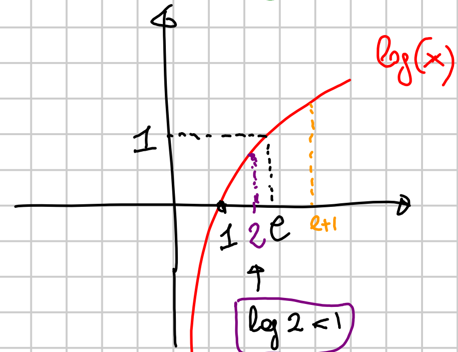
1) $f(x)=\log(e^x+1)+x-1$ → definita su tutto $\mathbb{R}$ perché $e^x+1>1>0$, quindi il logaritmo esiste

$$f'(x)=\frac{e^x}{\underbrace{e^x+1}_{>1}}+1=\frac{e^x+e^x+1}{e^x+1}=\frac{2e^x+1}{e^x+1}=\frac{\boxed{2e^x+2}\boxed{-1}}{e^x+1}=\boxed{2}-\frac{1}{e^x+1}$$

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left(2-\frac{1}{e^x+1}\right)=0-\frac{d}{dx}(e^x+1)^{-1}=-(-1)(e^x+1)^{-2}\cdot e^x=\frac{e^x}{\underbrace{(e^x+1)^2}_{>0}}$$





$f(0)=\log(e^0+1)+0-1=\log 2-1<0$

$\log x$ è quel valore t.c. $x=e^{\log x}$

$e=e^{\log e}$

$\Downarrow$

$\log e=1$

$f(1)=\log(e^1+1)+\cancel{1}-\cancel{1}>0$

Abbiamo mostrato che $f(0)<0$, $f(1)>0$ $\Rightarrow$ $[0,1]$ è un intervallo di separazione, cioè $f(0)f(1)<0$, e quindi esiste una soluzione $\alpha\in(0,1)$

Questa soluzione è unica, perché la f è strettamente crescente ($f'>0$).

(b) Il metodo è il metodo di punto fisso con $g(x)=1-\log(e^x+1)$

(notare che $\alpha=g(\alpha)=1-\log(e^\alpha+1)\iff 0=f(\alpha)=\log(e^\alpha+1)+\alpha-1$)

Teo: il metodo di pto fisso è localmente convergente se la derivata $|g'(\alpha)|<1$.

$$|g'(x)|=\left|0-\frac{e^x}{e^x+1}\right|=\left|-\frac{e^x}{e^x+1}\right|=\frac{e^x}{e^x+1}\qquad \frac{e^x}{e^x+1}<1\iff \cancel{e^x}<\cancel{e^x}+1$$

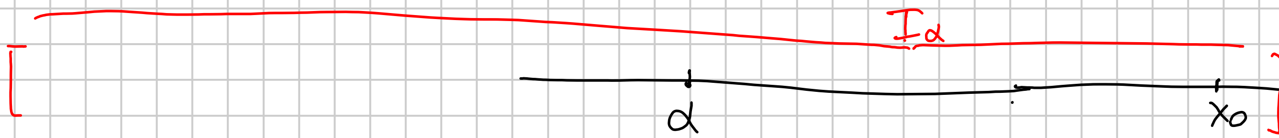
Quindi: $|g'(x)| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $|g'(\alpha)| < 1$, quindi il metodo è localmente convergente, e inoltre, per <u>ogni</u> possibile scelta di $\rho > 0$

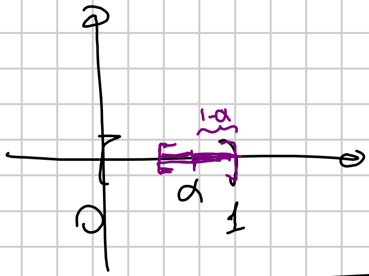
$|g'(x)| < 1$ per ogni $x \in I_\alpha = [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$, e quindi il metodo

$$\begin{cases} x_0 \in I_\alpha \\ x_{k+1} = g(x_k) \end{cases}$$

è localmente convergente, e quindi

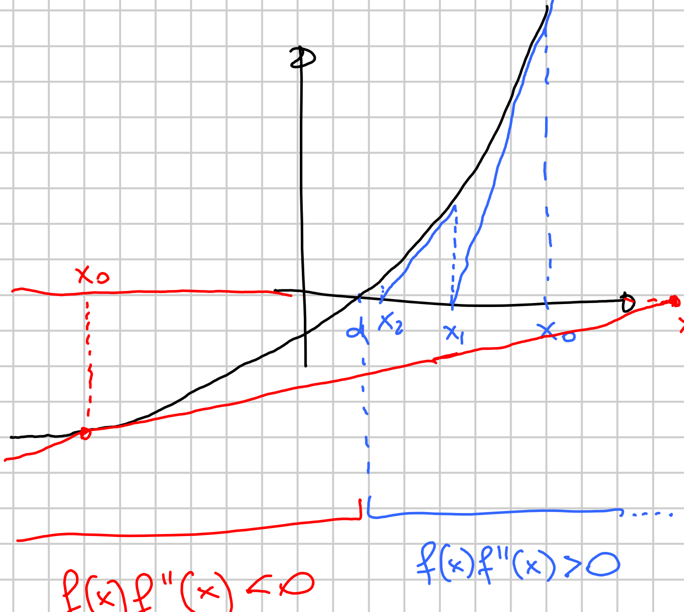
il metodo è loc. conv. per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$





c) $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$ $\leftarrow$ sempre ben definito, perché $f'(x) \neq 0$

f è di classe C^2, $f'(\alpha) \neq 0$ $\Rightarrow$ valgono le ipotesi del teo. di convergenza <u>locale</u>, $x_k \to \alpha$ quadraticamente per $x_0 \in I_\alpha$ opportuno



Possiamo dimostrare convergenza "in grande" su un intervallo?

$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Per ogni $\beta > \alpha$, sull'intervallo $[\alpha, \beta]$ valgono le ip. del teorema di conv. in grande $\Rightarrow$ il metodo di Newton converge per ogni $x_0 \geq \alpha$

Se $x_0 < \alpha$, cosa possiamo dire?

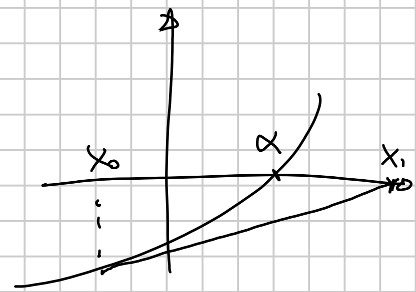
Graficamente, vediamo che la retta tangente a f in $x_0, f(x_0))$ interseca l'asse delle ascisse in un punto $x_1 > \alpha$, e per il teo. di conv. in grande la successione $x_1, x_2, x_3, \dots$ converge a α. Quindi, il metodo di Newton converge anche per $x_0 < \alpha$.

Riusciamo a dimostrare formalmente che $x_0 < \alpha \Rightarrow x_1 > \alpha$?

Il metodo di Newton è un metodo di punto fisso con funzione associata $h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$$\underbrace{x_1 - \alpha}_{\vee \atop 0} = h(x_0) - h(\alpha) = \underbrace{h'(\xi)}_{\| \atop \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} < 0}\underbrace{(x_0 - \alpha)}_{\wedge \atop 0} \quad \text{per qualche } \xi \in (x_0, \alpha)$$

perché negativo · negativo



$x_1 - \alpha > 0$, cioè $x_1 > \alpha$. □

$$\begin{matrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

$A_1 = 1$

$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

I) Vogliamo dim. che le sott. di testa sono invertibili $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} A_k = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k \\ -1 & & & & 0 \\ & -2 & & & \vdots \\ & & -3 & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & -(k-1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\cancel{x_1 + 2x_2 + \dots + (k-1)x_{k-1}} + kx_k = 0 \Rightarrow x_k = 0$

$-1\, x_1 = 0 \qquad x_1 = 0$

$-2\, x_2 = 0$

$\vdots \qquad \vdots$

$-(k-2)\, x_{k-2} = 0 \qquad x_{k-2} = 0$

$-(k-1)\, x_{k-1} = 0 \qquad x_{k-1} = 0$

ha solo la soluzione $x = 0$

II) A_k invertibile $\Leftrightarrow [y_1\, y_2 \cdots y_k] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k \\ -1 & & & & \\ & -2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -(k-1) & \end{bmatrix} = [0\ 0\ \cdots\ 0]$ ha solo la soluzione 0

III) Laplace risp. ultima colonna: $\det(A_k) = (-1)^{k+1} \cdot k \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -(k-1) \end{bmatrix} =$

$$= (-1)^{(k+1)} \cdot k \cdot (-1) \cdot (-2) \cdots (-(k-1)) = k!$$

IV) Elim. di Gauss:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \boxed{1} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{L_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & & & & \\ & -2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -(n-1) & \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & & n \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ & -2 & & & & \\ & & -3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -(n-1) & \end{bmatrix}}_{A_1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & \boxed{1} & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}}_{L_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ & 2 & 3 & \cdots & n \\ & -2 & & & \\ & & -3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & -(n-1) & \end{bmatrix}}_{A_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & & n \\ & 2 & 3 & \cdots & & n \\ & 0 & 3 & 4 & \cdots & n \\ & & -3 & & & \\ & & & -4 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & -(n-1) & \end{bmatrix}}_{A_2}$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix}}_{L_{n-1}} \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ & & 3 & 4 & \cdots & n \\ & & & \ddots & & \\ & & & & n-1 & n \\ & & & & & n \end{bmatrix}}_{\boxed{U}}$$

$$L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_1 A = U$$

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \boxed{-1} & 1 & & & \\ & \boxed{-1} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \boxed{-1} & 1 \end{bmatrix}}_{\boxed{L}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & \bigcirc & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ & & 3 & 4 & \cdots & n \\ & & & \ddots & & \\ & & & & n-1 & n \\ & & & & & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & & & 0 \\ & & -3 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & & -(n-1) & \end{bmatrix}$$

V) trovo formule sui casi piccoli + verifica

VI

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 \cdots & n-1 & n \\ -1 & & & & \\ & -2 & \ddots & & \\ & & -(n-2) & & \\ \hline & & & -(n-1) & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} L_{n-1} & 0 \\ \hline w & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} U_{n-1} & z \\ \hline 0 & \alpha \end{array}\right]$$

su casi piccoli, per trovare formule

$A_{n-1} = L_{n-1} U_{n-1}$

⚠ !

$$A_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & (n-1) \\ -1 & & & & \\ & -2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \underbrace{-(n-2)}_{\text{non è tri. sup.!}} & \end{bmatrix}$$

non è una fatt. $L_{n-1} U_{n-1}$

(b)

$$\det(A) = \det(L)\det(U) = \underbrace{\det \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & -1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{=1} \cdot \underbrace{\det \begin{bmatrix} 1 & & & ? & \\ & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 4 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & n \end{bmatrix}}_{= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!}$$

(e $\det(A_k) = k!$)

(c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ & & \ddots & n-2 & n-1 & n \\ & & & & n-1 & n \\ & & & & & n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \cdots + (n-1)\, x_{n-1} + n x_n = b_1$

$\vdots$

$(n-2)\, x_{n-2} + (n-1)\, x_{n-1} = b_{n-2}$

→ $(n-1)\, x_{n-1} + n x_n = b_{n-1}$

→ $n x_n = b_n$

$$x_n = \frac{b_n}{n} \qquad x_{n-1} = \frac{b_{n-1} \overset{=-b_n}{\boxed{- n x_n}}}{n-1} \qquad x_{n-2} = \frac{b_{n-2} \overset{=-b_{n-1}}{\boxed{-(n-1)x_{n-1} - n x_n}}}{n} \qquad \ldots$$

$$x_k = \frac{b_k \overset{=-b_{k+1}}{\boxed{-(k+1)x_{k+1} \cdots - n x_n}}}{k}.$$

$S = (k+1)\, x_{k+1} + (k+2)\, x_{k+2} + \ldots + n x_n$

Primo tentativo:

⚠ no!

non ha costo lineare

```
for k=n:-1:1
  num=b(k);
  for j=k+1:n
    num = num - j*x(j);
  end
```

si esegue $0+1+2+3+\ldots+(n-1)$ volte // $\frac{n(n-1)}{2}$ volte

```
    x(k) = num/K;
end
```

Sto "sprecando" ricalcolando s da zero: ad ogni passo devo solo aggiungere un termine.

$$s = (k+1)x_{k+1} + \dots + n x_n$$

Ad ogni passo:

```
x(k) = (b(k) - s)/K;
s = s + K*x(k);
```

```
function x = risolviU(b)
n = length(b);
x = zeros(n,1);
s = 0;
for k = n:-1:1
    x(k) = (b(k) - s)/k;
    s = s + k*x(k)
end
```

4 op/passo → costo: 4n

```
"
"
"
-----
"
x(k) = (b(k) - b(k+1))/K;
-----
end
```

→ 2 op/passo

costo: 2n

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/1 & -1/1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \frac{1}{n-2} & -\frac{1}{n-2} & \\ & & & \frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} \\ & & & & \frac{1}{n} \end{bmatrix}}_{U^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \\ b_n \end{bmatrix}$$