Polinomi simmetrici e disuguaglianze di Newton e MacLaurin

Federico Poloni

19 dicembre 2003

Sommario

Dopo una breve introduzione sulle funzioni simmetriche elementari, dimostrerò le disuguaglianze di Newton e MacLaurin, assumendo che chi legge abbia un minimo di familiarità (anche sommaria) con il concetto di derivata. Non verranno usati troppi risultati di analisi. La dimostrazione verrà condotta "sportivamente", cercando di porre l'accento sulle tecniche risolutive utilizzate (sperando che possano essere utili al problem-solver!) piuttosto che sulla giustificazione di passaggi intuitivamente veri.

1 Funzioni simmetriche elementari

Data una n-upla di reali positivi $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, le sue *funzioni simmetriche elementari* sono le somme:

$$\begin{aligned}
c_0 &:= 1 \\
c_1 &:= \sum_{i=1}^{n} x_i \\
c_2 &:= \sum_{i \neq j} x_i x_j \\
c_3 &:= \sum_{i \neq j \neq k} x_i x_j x_k \\
&\vdots \\
c_n &= \prod_{i=1}^{n} x_i
\end{aligned}$$

dove si intende che la somma c_2 va fatta su tutte le coppie di due valori x_i e x_j con $i \neq j$, e così via. c_n invece è semplicemente il prodotto di tutti gli x_i.

Le funzioni simmetriche elementari sono, a meno del segno, i coefficienti del polinomio di grado n

$$p(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - x_i) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i c_i \lambda^{n-i}$$

Queste funzioni hanno una grande importanza in virtù soprattutto di questo teorema:

Teorema 1 *Tutti i polinomi simmetrici nelle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$ (cioè, tali che scambiando tra di loro due qualsiasi degli x_i il polinomio rimane invariato) si possono scrivere come funzione dei c_i.*

Ad esempio, (come si vede dopo una notevole quantità di conti)

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1x_2x_3 = c_1^3 - 3c_2c_1 - 2c_2$$

Definiamo ora

$$d_i := \frac{c_i}{\binom{n}{i}}$$

cioè, dividiamo ogni c_i per il numero dei suoi termini.

2 Disuguaglianze di Newton

Le disuguaglianze di Newton e MacLaurin sono (in campo olimpico) due tra le disuguaglianze più inutili esistenti sulla faccia della Terra. Non solo non compaiono praticamente in nessun esercizio, ma anche quando compaiono in un loro caso particolare (con n e i fissati) la stessa tesi può essere dimostrata svolgendo i conti e applicando le disuguaglianze di raggruppamento ("bunching inequalities", vedi il testo di Kedlaya) o una combinazione standard di medie/riarrangiamento. Più interessante delle disuguaglianze in sé è la loro dimostrazione: quella qui presentata introduce un approccio analitico che può tornare utile in diversi campi (con la tecnica "scrivi il polinomio & deriva" si dimostrano parecchie uguaglianze che coinvolgono i binomiali ...).

Teorema 2 (Newton) *Se gli (x_i) sono reali, si ha $\forall k = 1, 2, \ldots n-1$*

$$d_k^2 \geq d_{k+1}d_{k-1} \tag{1}$$

L'idea qui è di utilizzare alcune tecniche di analisi, e in particolare i seguenti lemmi:

Lemma 3 (Rolle) *Se $f(x)$ è una funzione da $[a,b]$ a $\mathbb{R}$ continua e derivabile in $[a,b]$, e se $f(a) = f(b) = 0$, allora esiste nell'intervallo (a,b) (estremi esclusi) un punto ξ in cui la derivata della funzione si annulla: $f'(\xi) = 0$*

Dimostrazione: Poiché f è continua, assumerà un massimo e un minimo valore nell'intervallo $[a,b]$. Ora, uno di questi valori è interno all'intervallo ne segue per forza che la derivata si deve annullare (in un punto di massimo o minimo relativo la derivata si annulla ...). Può succedere che né il massimo né il minimo siano interni all'intervallo? Se così non fosse, dovrebbero trovarsi sui due estremi, uno in a e uno in b. Ma poiché $f(a) = f(b)$, da questo segue che $f(x)$ è costante su $[a,b]$ e quindi la tesi è banalmente verificata. □

Lemma 4 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua e derivabile k volte nell'intervallo $[a,b]$, e se si annulla in n punti distinti $x_1, x_2 \dots x_n$, allora la derivata k-esima si annulla in almeno $n-k$ punti distinti nello stesso intervallo .*

Dimostrazione: Supponiamo $k=1$: negli $n-1$ sottointervalli $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$, $\dots [x_{n-1},x_n]$ valgono le ipotesi del teorema di Rolle e quindi in ogni intervallo la derivata si annulla una volta. Pertanto abbiamo trovato $n-1$ punti in cui la derivata prima si annulla. Ripetiamo la dimostrazione utilizzando f' al posto di f e otterremo $n-2$ punti in cui la derivata seconda si annulla, e così via [1]. $\square$

Dimostrazione delle disuguaglianze di Newton: Salta all'occhio del problem-solver esperto che la disuguaglianza di Newton $d_k^2 \geq d_{k-1}d_{k+1}$ in realtà è legata al discriminante dell'equazione di secondo grado

$$d_{k+1}\lambda^2 + 2d_k\lambda + d_{k-1} \tag{2}$$

Quindi, affermare che vale la (1) in realtà equivale a dire che la (2) ha soluzioni reali. A questo punto, l'idea che ci viene è di provare a derivare un po' di volte il polinomio

$$p(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - x_i) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i c_i \lambda^{n-i} \tag{3}$$

che sappiamo avere n radici reali, cioè gli x_i, per ottenere in base al lemma 4 che anche la (2) ha due soluzioni reali. Proviamo a metterci a fare i conti: per semplicità di notazione, chiamiamo a_i il coefficiente del termine di grado i in $p(\lambda)$, così abbiamo

$$p(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_n \lambda^n$$

Ora, il nostro scopo è arrivare alla 2, che coinvolge solo i termini a_{k-1}, a_k, a_{k+1}: quindi in questa sommatoria i termini che ci interessano sono quelli con $i = k-1, k, k+1$. Mettiamoli subito in evidenza:

$$p(\lambda) = \textit{(termini di grado superiore)} + a_{k+1}\lambda^{k+1} + a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \textit{(termini di grado inferiore)}$$

Ora, deriviamo $k-1$ volte per eliminare i termini di grado inferiore a $k-1$: (ricordiamo che $D^l\lambda^m = m(m-1)\dots(m-l+1)\lambda^{m-l} = \frac{m!}{(m-l)!}\lambda^{m-l}$)

$$D^{k-1}p(\lambda) = \textit{(termini di grado superiore)} + \frac{(k+1)!}{2!}a_{k+1}\lambda^2 + \frac{k!}{1!}a_k\lambda + \frac{(k-1)!}{0!}a_{k-1} \tag{4}$$

E sappiamo per il lemma 4 che questo polinomio (di grado $n-k+1$) ha $n-k+1$ radici reali.

[1] Tutte le volte che in una dimostrazione leggete "e così via", potete interpretare come "per formalizzare la cosa servirebbe un ragionamento per induzione, ma il ragionamento è talmente semplice e noioso che non ho voglia di farlo". Se volete potete scrivere esplicitamente l'induzione per esercizio. Vi sentite ferrati sull'induzione?

A questo punto, è necessario un piccolo trucco: se derivassimo di nuovo, scomparirebbe il termine a_{k-1} che ci interessa tenere: perciò, utilizziamo questo lemma:

Lemma 5 *Se $\alpha \neq 0$ è soluzione del polinomio*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

allora $\frac{1}{\alpha}$ è una soluzione del polinomio

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

Dim. lemma:

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_n\alpha^n = \\ &= \alpha^n \left[a_0 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n + a_1 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) + a_n \right] \end{aligned}$$

e poiché $\alpha^n \neq 0$ il secondo termine deve essere uguale a 0. □

Ora, applichiamo questo lemma sul polinomio 4: poiché il suo grado è $n - k + 1$, dobbiamo eseguire la trasformazione $\lambda^i \to \lambda^{n-k-+1-i}$. Otteniamo così

$$q(\lambda) = \textit{(termini di grado inferiore)} + \frac{(k+1)!}{2!} a_{k+1} \lambda^{n-k-1} + \frac{k!}{1!} a_k \lambda^{n-k} + \frac{(k-1)!}{0!} a_{k-1} \lambda^{n-k+1} \tag{5}$$

E, poiché il polinomio da cui siamo partiti aveva $n - k + 1$ radici, per il lemma anche il polinomio trasformato ne deve avere altrettante.

A questo punto possiamo continuare a derivare per far sparire gli altri termini: deriviamo $n - k - 1$ volte, per rimanere così con un polinomio di secondo grado che avrà 2 radici reali per il lemma 4:

$$D^{n-k-1} q(\lambda) = \frac{(k+1)!(n-k-1)!}{2!0!} a_{k+1} + \frac{k!(n-k)!}{1!1!} a_k \lambda + \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{0!2!} a_{k-1} \lambda^2$$

Dividiamo ora per $2n!$ (operazione che lascia invariato il numero di radici) per fare sì che i doppi fattoriali al numeratore si possano scrivere come coefficienti binomiali

$$\begin{aligned} D^{n-k+1} q(\lambda) &= \frac{(k+1)!(n-k-1)!}{n!} a_{k+1} + 2\frac{k!(n-k)!}{n!} a_k \lambda + \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!} a_{k-1} \lambda^2 \\ &= \frac{a_{k+1}}{\binom{n}{k+1}} + 2\frac{a_k}{\binom{n}{k}} \lambda + \frac{a_{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \lambda^2 \end{aligned}$$

A questo punto, ricordiamoci cos'erano gli a_i e abbiamo finito:

$$(-1)^{n-k-1} \left(\frac{c_{n-k-1}}{\binom{n}{k+1}} - 2\frac{c_{n-k}}{\binom{n}{k}} \lambda + \frac{c_{n-k+1}}{\binom{n}{k-1}} \lambda^2 \right)$$

cioè, tenendo conto che per definizione $d_i = \frac{c_i}{\binom{n}{i}} = \frac{c_i}{\binom{n}{n-i}}$, abbiamo proprio

$$(-1)^{n-k-1}\left(d_{n-k-1}-2d_{n-k}\lambda+d_{n-k+1}\lambda^2\right)$$

Ora, questo polinomio ha due soluzioni reali in virtù del ragionamento fatto, quindi il suo discriminante è positivo: questo ci dà proprio la (1) (a meno di scambiare l'indice k con $n-k$, ma poiché k varia tra 1 e n questo è irrilevante). □

3 Piccoli aggiustamenti alla dimostrazione

Avete letto la dimostrazione del punto precedente, e siete convinti della sua correttezza? Bene, se la scriveste in una gara di matematica IMO-level, così com'è, prendereste cinque punti, al massimo sei.

Il motivo è semplice: durante il percorso, abbiamo introdotto un paio di ipotesi che limitano la validità della dimostrazione: infatti,

- Nel lemma 4, così come viene usato, si suppone che i punti $x_1, \dots x_n$ siano distinti (altrimenti gli intervalli degenererebbero...);
- Quando si applica il lemma 5, si suppone inoltre che $x_i \neq 0$ per ogni i.

Questi sono veri e propri buchi nella dimostrazione, che così com'è **non vale** nei casi in cui due o più x_i sono uguali o nel caso in cui uno valga zero. Si può "aggiustare" la dimostrazione passo passo, trattando con ordine i casi particolare quando appaiono, ma il procedimento sarebbe tedioso. È più interessante qui sfruttare una tecnica diversa, che è più interessante e riutilizzabile in molti altri problemi.

Così com'è, la dimostrazione funziona per tutte le n-uple che non cadono nei casi critici: quindi, supponiamo di voler dimostrare la disuguaglianza anche per una n-upla per cui $x_1 = x_2$: scriviamo la disuguaglianza, invece che per $(x_1, x_1, x_3, \dots x_n)$, per $(x_1, x_1+\varepsilon, , x_3 \dots x_n)$: a patto che ε sia sufficientemente piccolo, ora gli x_i sono tutti diversi e pertanto la disuguaglianza vale. Perciò, abbiamo

$$[d_i(x_1, x_1+\varepsilon, \dots x_n)]^2 \geq d_{i-1}(x_1, x_1+\varepsilon, \dots x_n) d_{i+1}(x_1, x_1+\varepsilon, \dots x_n)$$

Poiché questa disuguaglianza vale per tutti gli ε abbastanza piccoli, ci è lecito prendere il limite per $\varepsilon \to 0$. Poiché i d_i sono funzioni continue degli x_i[2], quando facciamo il limite otteniamo proprio la disuguaglianza voluta[3]:

$$[d_i(x_1, x_1, \dots x_n)]^2 \geq d_{i-1}(x_1, x_1, \dots x_n) d_{i+1}(x_1, x_1, \dots x_n)$$

[2]Sono definite come polinomi negli x_i, ed è un fatto noto dell'analisi che i polinomi siano funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$.

[3]Qui è utile una precisazione sui limiti delle disuguaglianze. In generale, si vede che se $a(x) \leq b(x) \quad \forall x$ allora $\lim_{x\to x_0} a(x) \leq \lim_{x\to x_0} b(x)$: tuttavia, non valgono le stesse disuguaglianze con il minore stretto: può verificarsi che sia $a(x) < b(x)$ ma $\lim a(x) = \lim b(x)$, ad esempio scegliendo $a(x) = 0$, $b(x) = x^2$ e facendo tendere x a 0.

Si estende in questo modo il risultato anche al caso in cui due x_i siano uguali tra loro. Se più di due sono uguali, ad esempio $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, si può usare un trucco analogo prendendo la n-upla

$$(x_1, x_1 + \varepsilon, x_1 + 2\varepsilon, x_1 + 3\varepsilon)$$

A questo punto è ovvio che il caso $x_i = 0$ si tratta in modo analogo ponendo $x_i = \varepsilon$ e facendo tendere $\varepsilon \to 0$. □

4 Disuguaglianze di MacLaurin

Teorema 6 (MacLaurin) *Se $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ è una n-upla di reali positivi o nulli, si ha*

$$\sqrt[k+1]{d_{k+1}} \leq \sqrt[k]{d_k} \quad \forall k = 2, 3 \ldots n$$

Quindi, riusciamo a "inscatolare" i d_k ordinatamente tra la GM e la AM:

$$GM = \sqrt[n]{d_n} \leq \sqrt[n-1]{d_{n-1}} \leq \ldots \leq \sqrt{d_2} \leq d_1 = AM$$

In particolare, se $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ tutti i d_k sono uguali tra loro.

Dimostrazione: Dimostreremo la tesi per induzione utilizzando le disuguaglianze di Newton (teorema 2). Assumiamo (ipotesi induttiva) che

$$\sqrt[k]{d_k} \leq \sqrt[k-1]{d_{k-1}}$$

e vogliamo dimostrare che

$$\sqrt[k+1]{d_{k+1}} \overset{?}{\leq} \sqrt[k]{d_k}$$

Riscriviamo la disuguaglianza così:

$$\begin{aligned} d_{k+1}^k &\overset{?}{\leq} d_k^{k+1} \quad \Leftrightarrow \\ \left(\frac{d_{k+1}}{d_k}\right)^k &\overset{?}{\leq} d_k \end{aligned}$$

Ora, per le disuguaglianze di Newton sappiamo che

$$\begin{aligned} d_{k+1} d_{k-1} &\leq d_k^2 \quad \Leftrightarrow \\ \frac{d_{k+1}}{d_k} &\leq \frac{d_k}{d_{k-1}} \end{aligned}$$

Per cui possiamo fare una prima maggiorazione e dire che

$$\left(\frac{d_{k+1}}{d_k}\right)^k \leq \left(\frac{d_k}{d_{k-1}}\right)^k \overset{?}{\leq} d_k$$

Ora, dobbiamo solo verificare[4] la disuguaglianza indicata con $\overset{?}{\leq}$: essa può essere riscritta in questo modo:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d_k}{d_{k-1}}\right)^k &\overset{?}{\leq} d_k \quad \Leftrightarrow \\
d_k^{k-1} &\overset{?}{\leq} d_{k-1}^k \quad \Leftrightarrow \\
\sqrt[k]{d_k} &\overset{?}{\leq} \sqrt[k-1]{d_{k-1}}
\end{aligned}$$

Ma l'ultima disuguaglianza è proprio l'ipotesi induttiva: essa è quindi dimostrata, e perciò possiamo levare i "?" e concludere[5].

Resta ora da dimostrare il passo base. Non possiamo usare come passo base la disuguaglianza tra d_1 e d_0 perché non è ben definita (cosa vuol dire fare $\sqrt[0]{\cdot ?}$). Pertanto, una soluzione funzionante è quella di usare la $\sqrt{d_2} \leq d_1$, che si dimostra con poca fatica con i metodi "standard" (quadra, svolgi i conti, applica medie/riarrangiamento o *bunching*) (esercizio: dimostrare questa disuguaglianza!). Possiamo però riaggiustare un po' la tesi in modo da schivarci questo passaggio: dimostriamo per induzione non che $\sqrt[k+1]{d_{k+1}} \leq \sqrt[k]{d_k}$, ma che $d_{k+1}^k \leq d_k^{k+1}$: le due cose sono chiaramente equivalenti per $k \geq 1$, ma la seconda è vera anche per $k = 0$ (la dimostrazione non richiede cambiamenti, anzi si accorcia: il primo e l'ultimo passaggio della dimostrazione erano portare l'ipotesi e la tesi dalla prima nella seconda forma). A questo punto possiamo partire da un valore più basso e usare come passo base la disuguaglianza ovvia $d_1^0 \leq d_0^1$ (perché ovvia? sostituiamo ai d_i la loro definizione e otteniamo $1 \leq 1 \ldots$). La dimostrazione per induzione è così completata.□

[4]Ovviamente, non è per nulla scontato che se facciamo una prima maggiorazione questa disuguaglianza deve ancora valere: potremmo avere "dato via" una quantità troppo grande: per esempio, se devo provare che $\sqrt{ab} \overset{?}{\leq} \frac{a+b}{2}$, non posso maggiorare $\sqrt{ab} \leq 2\sqrt{ab}$ e sperare che valga $\sqrt{ab} \leq 2\sqrt{ab} \overset{?}{\leq} \frac{a+b}{2}$!

[5]Ovviamente, scrivere la cosa con i simboli $\overset{?}{\leq}$ non è il massimo della formalità…: è una notazione comoda e veloce che è bene imparare a usare soprattutto per la brutta copia, ma al momento di scrivere e consegnare una dimostrazione "in gara" è meglio cercare di riformulare la cosa eliminandoli. Esercizio: riformulare questa dimostrazione eliminando i $\overset{?}{\leq}$.