Problema 1

Sia A un sottoinsieme dell'insieme $S = \{1, 2, \ldots, N^3\}$ avente esattamente $N+1$ elementi. Dimostrare che esistono dei numeri $t_1, t_2, \ldots, t_N$ in S tali che gli insiemi

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\} \quad \text{per} \quad j = 1, 2, \ldots, N$$

siano a due a due disgiunti.

Soluzione: Scegliamo un primo valore t_1 a caso nell'insieme, e da qui in poi costruiamo i numeri t_i ad uno ad uno: cioè, supponiamo di avere già k numeri diversi tra loro t_1, t_2, t_k tali che

$$x_i + t_j \neq x_l + t_m \quad \forall i \neq l \in S, \quad \forall j \neq m \in \{1, \ldots, k\}$$

e dimostriamo che è sempre possibile estrarne un $k+1$-esimo che mantenga le proprietà richieste.

Infatti, quanti sono i valori "vietati"? Sono tutti quei T per cui

$$\exists i, l \in S, j \in \{1, \ldots, k\} \mid (x_i - x_l) + t_j = T$$

Stimiamo il numero di questi T: nel caso peggiore, ogni scelta di i, j, l "vieta" un nuovo valore possibile. Quindi, per le scelte degli x_i, x_l abbiamo $(N+1)N$ possibili scelte (ricordiamo che dev'essere $i \neq l$), mentre per la scelta di t_j abbiamo k possibilità. Il numero dei valori vietati è quindi al più $(N+1)Nk$ (perché "al più"? perché ci siamo messi nel caso peggiore e abbiamo supposto che per ogni scelta di i, j, l non si ottenesse un valore già scartato in precedenza e che tutti i valori assunti da $(x_i - x_l) + t_j$ fossero in S); tutti gli altri $N^3 - k$ valori (scartiamo anche quelli già scelti come $t_1, \ldots, t_k$) possono essere scelti come t_{k+1} mantenendo le proprietà dell'insieme.

Se $k \leq N - 1$ ci resta sempre qualche valore tra cui scegliere: infatti,

$$(N+1)Nk \leq (N+1)N(N-1) = N^3 - N < N^3 - k - 1$$

quindi il numero dei valori vietati per t_{k+1} è al più uguale al numero dei valori disponibili *meno uno*. È proprio questo valore "avanzato" che ci consente di aggiungere di volta in volta un nuovo valore t_{k+1} all'insieme fino a raggiungere N elementi. $\square$

Problema 2

Determinare tutte le coppie di interi positivi (a, b) tali che

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} \tag{1}$$

è un intero positivo.

Soluzione: Le soluzioni sono tutte e sole le coppie delle forme:

$$(2k, 1)$$
$$(k, 2k)$$
$$(k(8k^3 - 1), 2k)$$

con $k \in \mathbb{N}$.

Lo proviamo qui di seguito:

Step 1 *Osservazione banale*

Perché la (1) sia intera e positiva, è necessario che il denominatore sia positivo, e quindi che $2a \geq b$.

Step 2 *Soluzioni con $b = 1$*

Supponiamo $b = 1$: l'espressione diventa

$$\frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$$

ed è chiaro che questo valore è intero solo per a pari, cioè $a = 2k$.

Il caso $b = 1$ è risolto completamente, quindi di seguito supponiamo $b > 1$.

Step 3 *Trasformazione gustosa*

Detto N il valore dell'espressione (1), si ha:

$$2b^2N - a = \frac{2a^2b^2 - 2a^2b^2 + ab^3 - a}{2ab^2 - b^3 + 1} = \frac{a(b^3 - 1)}{2ab^2 - (b^3 - 1)}$$

Chiamiamo m il valore di questa espressione, cioè $m = 2b^2N - a$. Riscrivendo in modo da mettere in evidenza $b^3 - 1$,

$$m = \frac{a(b^3 - 1)}{2ab^2 - (b^3 - 1)} \tag{2}$$

$$2amb^2 = (a + m)(b^3 - 1) \tag{3}$$

Notiamo che la (3) è simmetrica in a e m: questo ci suggerisce che per ogni soluzione del tipo (a, b) anche (m, b) possa essere soluzione. Lo verifichiamo, ricavando m in funzione di a e b dalla (2): (per semplicità di notazione, poniamo $B := b^3 - 1$)

$$\frac{m^2}{2mb^2 - B} = \tag{4}$$

$$\frac{a^2B^2}{[2ab^2 - B]^2[2b^2\frac{aB}{2ab^2 - B} - B]} = \tag{5}$$

$$\frac{a^2B^2}{[2ab^2 - B][2ab^2B - B(2ab^2 - B)]} = \tag{6}$$

$$\frac{a^2B^2}{[2ab^2 - B]B^2} = \tag{7}$$

$$\frac{a^2}{2ab^2 - B} = N \tag{8}$$

Step 4 *La trasformazione si comporta bene*

Supponiamo di avere una soluzione con $a \geq b$: si ha

$$\frac{m}{a} = \frac{b^3 - 1}{2ab^2 - b^3 + 1} \leq \frac{b^3 - 1}{b^3 + 1} < 1 \Rightarrow m < a$$

Supponiamo di avere una soluzione con $a < b$: si ha

$$a - m = a - \frac{aB}{2ab^2 - B} = \frac{2(ab^2 - b^3 + 1)}{2ab^2 - B} \Rightarrow a \leq m$$

dove la freccia vale perché il numeratore è minore di 1 e il denominatore è positivo (step 1). Può essere $a = m$? Dovremmo avere $ab^2 - b^3 + 1 = 0$, e quindi $b \mid 1$ perché divide tutti gli altri membri dell'uguaglianza, ma abbiamo escluso a priori le soluzioni con $b = 1$.

Quindi sappiamo che la nostra trasformazione quando prende una soluzione con $a < b$ *aumenta* il valore di a, quando prende una soluzione con $a \geq b$ *diminuisce* il valore di a. Ma, come segue dalla (3), i valori di a e m sono accoppiati, cioè se partiamo da a e trasformiamo otteniamo m e viceversa. Perciò, per ogni coppia di soluzioni associate attraverso la trasformazione, una deve avere $a \geq b$ e l'altra $a < b$ (lo si nota riflettendo sulle condizioni). Perciò, se riusciamo a determinare tutte le soluzioni con $a < b$, allora le soluzioni con $a > b$ devono essere tutte e sole quelle "accoppiate" a queste ultime tramite la trasformazione.

Step 5 *Soluzioni con $a < b$*

Prendiamo una generica soluzione con $a < b$. Sia $b = a + k$, con $0 < k \leq a$ perché sappiamo che $2a < b$. Scriviamo ora:

$$N = \frac{a^2}{2a(a+k)^2 - (a+k)^3 + 1} = \frac{a^2}{(a+k)^2(a-k) + 1}$$

Ora, se fosse $k < a$, avremmo che il denominatore sarebbe maggiore del numeratore, e quindi il risultato non sarebbe intero. Perciò dev'essere $a = k$ e quindi $(a, b) = (k, 2k)$.

Step 6 *Tutte le soluzioni*

Quindi tutte le soluzioni con $a < b$ devono essere della forma $(k, 2k)$ (per lo step 5), mentre tutte quelle con $a > b$ devono essere quelle ad esse accoppiate tramite la trasformazione, cioè quelle della forma $(k(8k^3 - 1), 2k)$. A queste vanno aggiunte le soluzioni della forma $(2k, 1)$ considerate in precedenza. Si verifica poi che per ogni scelta di $k \in \mathbb{N}$ le tre formule portano effettivamente a un valore intero dell'espressione (1). $\square$

Problema 4

Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso i cui vertici stanno su una circonferenza. Siano P, Q e R i piedi delle perpendicolari tracciate da D alle rette BC, CA e AB rispettivamente. Dimostrare che $PQ = QR$ se e solo se le bisettrici degli angoli $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ADC}$ si intersecano sulla retta AC.

Soluzione: Una soluzione secondo il mio approccio preferito, quello delle trasformazioni geometriche.

Lemma 1 *: Siano r, r' e s, s' due coppie di rette perpendicolari. Allora gli angoli tra r e s sono uguali agli angoli tra r' e s'*

Lemma 2 *Sia H il piede della perpendicolare a una retta r per un punto X. Se sottopongo il punto H alla composizione di queste due trasformazioni:*

1. *Una rotazione di un angolo α a piacere attorno a X*

2. *Una omotetia di centro X e fattore di scala $1/\cos\alpha$*

allora il punto risultante H' sta sulla retta r. Inoltre, l'angolo $\widehat{HH'X}$ ha ampiezza $90° - \alpha$.

La dimostrazione è lasciata al lettore[1].

Si ha, con un po' di angle-chasing:

$$\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = \widehat{QDR} \quad \text{(per il lemma 1)}$$

$$\widehat{BDA} = \widehat{BCA} = \widehat{QDP} \quad \text{(analogamente)}$$

Quindi l'angolo $\widehat{PDR}$ è uguale all'angolo $\widehat{CDA}$. Viene una forte tentazione di ruotare i punti P, Q ed R di un angolo opportuno α e sovrapporli. Perciò, applichiamo queste due trasformazioni in sequenza ai punti P, Q, R:

1. Una rotazione di angolo α (quello necessario per portare la semiretta DP sulla semiretta DC e la DR su DA) attorno a X

2. Una omotetia di centro X e fattore di scala $1/\cos\alpha$

Ora, l'immagine P' di P deve stare sulla retta DC (per come è stato scelto α) e sulla retta CD (per il lemma 2). Quindi, deve trattarsi del punto C. Analogamente, l'immagine di R, R', coincide con A. L'immagine di Q è invece un punto Q' all'interno del lato AC.

Inoltre, per l'"inoltre" del lemma 2, deve essere:

$$\begin{array}{rcll}
\widehat{BCD} & = & 90° - \alpha & \\
\widehat{BAD} & = & 90° + \alpha & \\
\widehat{CQ'D} & = & 90° - \alpha & \\
\widehat{AQ'D} & = & 90° + \alpha & \\
\widehat{CDQ'} & = & \widehat{BCA} & \text{(perché la trasformazione fatta conserva gli angoli)} \\
\widehat{ADQ'} & = & \widehat{BAD} & \text{(per lo stesso motivo)}
\end{array}$$

Perciò, i triangoli BCD e $AQ'D$ sono simili, così come i triangoli BAD e $CQ'D$. Ne segue che

$$\frac{P'Q'}{Q'D} = \frac{CQ'}{Q'D} = \frac{BA}{AD}$$

$$\frac{R'Q'}{Q'D} = \frac{AQ'}{Q'D} = \frac{BC}{CD}$$

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{P'Q'}{Q'R'} = \frac{P'Q'}{Q'D}\frac{Q'D}{Q'R'} = \frac{BA}{AD}\frac{CD}{BC}$$

Poiché tutti i passaggi fatti sono reversibili, si ha

$$PQ = QR \Leftrightarrow BA \cdot CD = AD \cdot BC$$

[1] Ho sempre sognato di poterlo scrivere. Dà una sensazione di potenza.

D'altra parte, se le bisettrici di $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ADC}$ si incontrano in un punto I sulla diagonale AC, si ha per il teorema della bisettrice:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{CI}{IA} = \frac{DC}{DA} \Rightarrow BA \cdot CD = AD \cdot BC$$

Di nuovo, i passaggi sono reversibili, quindi si ha:

le bisettrici si incontrano su AC $\Leftrightarrow BA \cdot CD = AD \cdot BC \Leftrightarrow PQ = QR$

□

Problema 5

Sia n un intero positivo, e siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numeri reali con $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.

(a) Dimostrare che

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 .$$

(b) Dimostrare che si ha l'uguaglianza se e solo se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ formano una progressione aritmetica.

Soluzione: ...un mare di conti.

Lemma 1

$$\sum_{1\leq j<i\leq m}(i-j) = \frac{(m-1)m(m+1)}{6}$$

Dimostrazione per induzione: per $m = 2$ la formula è banalmente vera, in quanto si riduce a $2 - 1 = 1$. Per il passo induttivo, mettiamo in evidenza nella sommatoria il termine m:

$$\sum_{1\leq j<i\leq m}(i-j) = \sum_{i=1\ldots m-1}(m-i) + \sum_{1\leq j<i\leq m-1}(i-j) =$$

$$= \sum_{j=1\ldots(m-1)} j + \frac{(m-2)(m-1)m}{6} = \frac{(m-1)m}{2} + \frac{(m-2)(m-1)m}{6} = \frac{(m-1)m(m+1)}{6}$$

Step 1 *piallo qualche fattore* 2

Riscrivo la disuguaglianza tenendo conto che i termini del tipo $x_a - x_b$ nelle sommatorie sono contati due volte, una per $i = a, j = b$ e una per $i = b, j = a$:

$$\left(2\sum_{1\leq j<i\leq n}(x_i - x_j)\right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3}\cdot 2\sum_{1\leq j<i\leq n}(x_i - x_j)^2$$

$$\left(\sum_{1\leq j<i\leq n}(x_i - x_j)\right)^2 \leq \frac{n^2-1}{3}\sum_{1\leq j<i\leq n}(x_i - x_j)^2$$

Dimostreremo la disuguaglianza in quest'ultima versione, lavorando per induzione su n. Contemporaneamente, dimostreremo per induzione anche il punto (b).

Step 2 *metto in evidenza x_n*

Metto in evidenza il fattore x_n nella disuguaglianza e svolgo i conti:

$$\left(\sum_{i=1\cdots n-1}(x_n-x_i)+\sum_{1\leq j<i\leq n-1}(x_i-x_j)\right)^2\leq\frac{n^2-1}{3}\left(\sum_{i=1\cdots n-1}(x_n-x_i)^2+\sum_{1\leq j<i\leq n-1}(x_i-x_j)^2\right)$$

$$\left((n-1)x_n-\sum_{i=1\cdots n-1}x_i+\sum_{1\leq j<i\leq n-1}(x_i-x_j)\right)^2\leq\frac{n^2-1}{3}\left((n-1)x_n^2-2x_n\sum_{i=1\cdots n-1}x_i+\sum_{i=1\cdots n-1}x_i^2+\sum_{1\leq\ldots}\right.$$

Per semplicità di notazione, poniamo:

$$A:=\sum_{1\leq j<i\leq n-1}(x_i-x_j)$$

$$B:=\sum_{i=1\cdots n-1}x_i$$

$$C:=\sum_{1\leq j<i\leq n-1}(x_i-x_j)^2$$

$$D:=\sum_{i=1\cdots n-1}x_i^2$$

cosicché la disuguaglianza diventa:

$$((n-1)x_n-B+A)^2\leq\frac{n^2-1}{3}\left((n-1)x_n^2-2x_nB+D+C\right)$$

Svolgiamo di nuovo un mare di conti per scrivere la disuguaglianza come una disequazione in x_n: il risultato finale è

$$-\frac{(n-1)^2(n-2)}{3}x_n^2+2[(n-1)A+\frac{(n-1)(n-2)}{3}B]+(A-B)^2-\frac{n^2-1}{3}(D+C)\leq 0$$

Step 3 *Calcoliamo il Δ*

Si tratta di una disequazione quadratica in x_n con coefficiente dominante negativo: quindi possiamo essere sicuri che $f(x_n)\leq 0\forall x_n$ se verifichiamo che il discriminante sia negativo (qui $f(x_n)$ è il termine sinistro della disuguaglianza):

$$\frac{\Delta}{4}=\left[(n-1)A+\frac{(n-1)(n-2)}{3}B\right]^2+\frac{(n-1)^2(n2)}{3}\left[(A-B)^2-\frac{n^2-1}{3}(D+C)\right]$$

che, dopo conti mostruosi e semplificazioni, diventa:

$$=\frac{(n-1)^2(n+1)}{9}\left[3A^2+(n-2)B^2-(n-1)(n-2)[D+C]\right]$$

Ora, eliminiamo D facendo uso delle relazioni tra i vari termini:

$$C:=\sum_{1\leq j<i\leq n-1}(x_i-x_j)^2=(n-2)\sum_{i=1\ldots n-1}x_i^2-2\sum_{1\leq j<i\leq n-1}x_ix_j$$

$$B^2 = \left(\sum_{i=1\dots n-1} x_i\right)^2 = \sum_{i=1\dots n-1} x_i^2 + 2 \sum_{1\le j<i\le n-1} x_i x_j$$

$$C + B^2 = (n-1) \sum_{i=1\dots n-1} x_i^2 = (n-1)D$$

quindi

$$C + B^2 = (n-1)D$$

Sostituendo e semplificando di nuovo otteniamo:

$$\frac{\Delta}{4} = \frac{(n-1)^2(n+1)}{9}\left[3A^2 - (n-2)nC\right]$$

che è minore o uguale a zero per ipotesi induttiva (ricordiamo il significato attribuito ad A e a C).

Step 4 *Condizioni di uguaglianza*

Ora, quando vale l'uguaglianza? Innanzitutto è necessario che il discriminante sia nullo, cioè (per ipotesi induttiva) che $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ siano in progressione aritmetica. Poi, la funzione quadratica, del tipo $f(x_n) = ax_n^2 + bx_n + c$,deve assumere il suo massimo, e questo avviene quando $x_n = -\frac{b}{2a}$, cioè

$$x_n = \frac{(n-1)A + \frac{(n-1)(n-2)}{3}B}{(n-1)^2\frac{n-2}{3}}$$

Sappiamo però che $x_1, \dots x_{n-1}$ sono in progressione aritmetica, quindi possiamo scrivere

$$x_i = r \cdot i + s$$

per opportuni valori r ed s. Quindi abbiamo

$$A = \sum_{1\le j<i\le n-1} (x_i - x_j) = r \sum_{1\le j<i\le n-1} (i-j)$$

che per il lemma vale $r\frac{(n-2)(n-1)n}{6}$, e

$$B = \sum_{i=1\dots n-1} x_i = \sum(n-1)s + r\frac{n(n-1)}{2}$$

Sostituendo per ricavare x_n, risulta

$$x_n = r \cdot n + s$$

quindi perché valga l'uguaglianza anche x_n deve essere in progressione aritmetica con gli altri $n-1$ valori. □