1. Facendo eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema, si ottiene
$$\begin{bmatrix} 1 & x & 4x+1 & 4x+1 \\ 0 & -x+1 & -x & -x-1 \\ 0 & 0 & -x & -x \end{bmatrix}$$
due pivot pari a $-x+1$ e $-x$. Se $x \neq 0, 1$ la matrice ha tre pivot non nulli, quindi è invertibile e c'è una soluzione. Per $x = 0$, ci sono due pivot nelle prime due colonne e l'ultima riga è nulla, quindi ci sono infinite soluzioni. Per $x = 1$, si può sostituire $x = 1$ e ottenere
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$
da cui si continua con Gauss ottenendo
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Questa volta abbiamo un pivot sull'ultima colonna, quindi b non è combinazione lineare delle colonne di A e non ci sono soluzioni. Ricapitolando: se $x = 0$ infinite soluzioni, se $x = 1$ nessuna, altrimenti una.

2. (a) Portando A in forma a scala ridotta abbiamo
$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Ci sono due variabili libere x_3, x_4; si ricava che una base di $\ker A$ è
$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Per completarla a una base di $\mathbb{R}^4$, facciamo eliminazione di Gauss sull'insieme di generatori di $\mathbb{R}^4$ determinato dalle colonne della matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Troviamo pivot nelle prime 4 colonne, quindi v_1, v_2 e i primi due vettori della base canonica sono una base di $\mathbb{R}^4$.

(b) Poiché facendo eliminazione di Gauss su A abbiamo trovato pivot nelle colonne 1 e 2, le prime due colonne di A sono una base di $\operatorname{im} A$.

(c) Per vedere se $b \in \operatorname{im} A$, basta fare eliminazione di Gauss sulla matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

e vedere se c'è un pivot o no nella terza colonna. Risulta

$$M \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

quindi la risposta è sì, e guardando all'ultima colonna abbiamo esplicitamente

$$b = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$