CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
A.A. 2012/2013 – Appello 13/06/2013

NOME COGNOME MATRICOLA

Esercizio 1 Si consideri la matrice tridiagonale

$$A_n(\alpha) = \begin{bmatrix} 2+\alpha & -1 & & \\ -1 & 2+\alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2+\alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},\ n \geq 1.$$

1. Dimostrare che $\forall \alpha > 0$ $A_n(\alpha)$ è invertibile.
2. Per $\alpha > 0$ sia $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n]$ la soluzione del sistema lineare $A_n(\alpha)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1$, con $\boldsymbol{e}_1 \in \mathbb{R}^n$ la prima colonna della matrice identica di ordine n. Dimostrare che $x_n \neq 0$.
3. Scrivere una funzione Matlab® che dati in input $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ implementa un processo di sostituzione all'indietro e restituisce in output $\boldsymbol{z} = [z_1, \dots, z_{n-1}]$ e $\theta \in \mathbb{R}$ tali da aversi
$$A_n(\alpha)\,[z_1, \dots, z_{n-1}, 1]^T = \theta \boldsymbol{e}_1.$$
(Sugg.: osservare che l'ultima equazione permette di determinare z_{n-1}. Analogamente, procedendo a ritroso determinare $z_{n-2}, \dots, z_1$ e quindi θ.)
4. Valutare il costo aritmetico del calcolo di $(\boldsymbol{z}, \theta) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$.
5. Per $\alpha > 0$ si può avere $\theta = 0$? Motivare la risposta.
6. Per $n = 200, 400, 800$ e $\alpha = 1$ riportare l'errore relativo
$$\epsilon_n = \frac{\| \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}} \|_\infty}{\| \boldsymbol{x} \|_\infty},$$
ove $\boldsymbol{x}$ è la soluzione del sistema lineare $A_n(\alpha)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1$ ottenuta con il comando \ ("backslash") in Matlab® e $\hat{\boldsymbol{x}} = [z_1/\theta, \dots, z_{n-1}/\theta, 1/\theta]^T$ è la soluzione del sistema lineare $A_n(\alpha)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1$ ottenuta con la procedura implementata al punto precedente. Commentare i risultati ottenuti.