1 Prerequisiti matematici

1.1 La formula di Taylor

Per il corso di Calcolo Numerico occorre una certa padronanza di alcuni semplici strumenti matematici. Forse il più importante strumento è dato dal Teorema di Taylor.

Teorema 1.1 *Sia $f(x)$ una funzione derivabile $n+1$ volte con derivate continue in un intervallo $[a,b]$ per un qualche $n \geq 1$. Siano $x, x_0 \in [a,b]$. Allora*

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x),$$

con

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0),$$

e

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x), \quad |\xi_x - x_0| < |x - x_0|.$$

Il punto x_0 può essere scelto a piacimento ed è spesso preso uguale a 0. In questo caso il polinomio di Taylor si semplifica e diviene

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{x^2}{2} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0),$$

ed il resto risulta

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x).$$

La formula di Taylor è importante perché permette di rappresentare delle funzioni generali anche complicate per mezzo di semplici polinomi ed allo stesso tempo di limitare l'errore che si commette.

Ad esempio la formula di Taylor ci permette di appossimare e^x. Infatti per $x_0 = 0$ abbiamo

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}e^{\xi_x},$$

dove $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}e^{\xi_x}$. La formula di Taylor rappresenta l'esempio più semplice di approssimazione e stima dell'errore. Supponiamo infatti di voler approssimare e^x nell'intervallo $[-1,1]$ con un errore assoluto di 10^{-6}. Possimo allora utilizzare la formula di Taylor e calcolare il valore di n affinché $|e^x - p_n(x)| \leq 10^{-6}$. Poiché per ogni $x \in [-1,1]$

$$|e^x - p_n(x)| = |R_n(x)|,$$

il modo più semplice di procedere è quello di carcare delle semplici maggiorazioni superiori del resto. In particolare

$$|R_n(x)| = \frac{x^{n+1}e^{\xi_x}}{(n+1)!} \leq \frac{e^{\xi_x}}{(n+1)!} \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

Si vede che per avere $|R_n(x)| \leq 10^{-6}$ per $x \in [-1,1]$ è sufficiente prendere $n = 9$.

È importante sottolineare che l'accuratezza della formula di Taylor si perde man mano che ci allontaniamo da x_0 ma è molto buona vicino al punto x_0 in quanto $p_n(x)$ è costruito in modo da eguagliare $f(x)$ e le sue prime n derivate in x_0.

1.2 Il teorema del valor medio

Un altro teorema di grande importanza è il teorema del valor medio o di Lagrange.

Teorema 1.2 *Sia f una funzione continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b). Allora esiste un punto $\xi \in (a, b)$ tale che*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Riscrivendo la formula precedente come

$$f(a) - f(b) = f'(\xi)(a - b),$$

notiamo che grazie a questo teorema è possibile esprimere la differenza di una funzione in due punti con la differenza dei suoi argomenti oppurtunamente moltiplicati da un fattore di scala dato dalla derivata. Ad esempio possiamo utilizzare questo teorema per determinare che

$$|\cos(x_1) - \cos(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$$

poiché la derivata del coseno è limitata in modulo da 1. Il teorema di Lagrange si può vedere come un caso particolare del teorema di Taylor per $n = 0$.

2 Esercizi

1. Utilizzare il polinomio di Taylor per trovare un'approssimazione di $\sqrt{e}$ con un errore assoluto inferiore a 10^{-3}.

2. Si detremini il polinomio di Taylor di ordine 3 di $\sin(x)$ nei punti $x_0 = \pi/4$, $x_0 = \pi/2$ e $x_0 = \pi/6$.

3. Per ciascuna delle seguenti funzioni costruire il polinomio di approssimazione di Taylor di ordine 3 usando $x_0 = 0$, e dare poi una stima dell'errore commesso calcolando una maggiorazione del resto sull'intervallo dato.

   a) $f(x) = e^{-x}, x \in [0, 1]$
   b) $f(x) = \ln(1 + x), x \in [-3/4, 3/4]$
   c) $f(x) = 1/(x + 1), x \in [-1/2, 1/2]$

4. Sia f una funzione continua e monotona in $[a, b]$ e che $f(a)f(b) < 0$. Dimostrare che esiste $\alpha \in [a, b]$ tale che $f(\alpha) = 0$.

5. Per ciascuna delle funzioni dell'esercizio 3, si usi il teorema di Lagrange per determinare un valore M tale che

   $$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$$

   per ogni x_1, x_2 nell'intervallo.