Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico del 15 Gennaio 2007

Esercizio 1

(a) Risulta $\omega = (0.100)_2\, 2^{-1} = 2^{-2} = 1/4$. Il numero successivo ad ω in F è $(0.101)_2\, 2^{-1}$ e dunque $\delta_1 = (0.001)_2\, 2^{-1} = 2^{-4} = 1/16$.

(b) Risulta $\Omega = (0.111)_2\, 2^2 = (1 - 2^{-3})\, 2^2 = 7/2$. Il numero precedente ad Ω in F è $(0.110)_2\, 2^2$ e dunque $\delta_2 = (0.001)_2\, 2^2 = 2^{-1} = 1/2$.

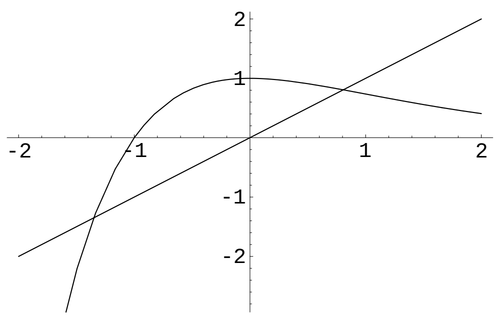
(c) Il numero di elementi positivi di F è $p = 2^2\,(2 + 1 + 1) = 16$. quindi

$$\delta_3 = \frac{\Omega - \omega}{p - 1} = \frac{7/2 - 1/4}{15} = \frac{13}{60}.$$

(d) Gli elementi positivi di F non sono equidistanti ma diventano meno fitti muovendosi da ω verso Ω. Infatti i quattro più piccoli distano di $1/16$, i successivi quattro di $1/8$, i successivi quattro di $1/4$ e i quattro più grandi di $1/2$.

Esercizio 2

(a) Dal grafico di $y = x$ e $y = g(x)$ risulta che vi sono due punti fissi α e β, con $-2 < \alpha < -1$ e $0 < \beta < 1$.



(b) La successione generata risulta divergente. Più precisamente $\lim_{k\to\infty} x_k = -\infty$.

(c) Osserviamo intanto che $g'(x) = -x/e^x$. Per $x > 0$ dalla disuguaglianza $e^x > x$ otteniamo $x/e^x < 1$. Per $x > 0$ risulta ovviamente $x/e^x > 0$. Dunque $-1 < g'(x) < 0$.

(d) Siccome $\beta > 0$ ne segue che $-1 < g'(\beta) < 0$ e quindi $0 \neq |g'(\beta)| < 1$. Questo implica la convergenza locale e il fatto che l'ordine di convergenza sia 1.

(e) Se $0 < x_0 < \beta$ si ponga $\delta = \beta - x_0$. L'intervallo $[\beta - \delta, \beta + \delta]$ è un intervallo chiuso e centrato in β cui $|g'(x)| < 1$. Per il teorema del punto fisso a partire da ogni punto in questo intervallo il metodo genera una successione convergente a β.

Esercizio 3

(a) Con un solo passo di eliminazione si ottiene

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ovviamente $\det(A) = 1 = \det(M)$.

(b) Siccome $N = M - A$ si trova

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\begin{aligned} P = M^{-1}N &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Risulta

$$\begin{aligned} G &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2/3 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(d) La matrice P ha l'autovalore 0 con molteplicità algebrica 2, dunque $\rho(P) = 0$. La matrice G ha autovalori 0 e $2/3$ e quindi $\rho(G) = 2/3$. La matrice J ha autovalori $\pm\sqrt{2/3}$ e dunque $\rho(G) = \sqrt{2/3}$.

(e) Dai risultati ottenuti in (d) segue

$$\rho(P) < \rho(G) < \rho(J) < 1.$$

I tre metodi risultano convergenti. Il più veloce è quello con matrice P seguito dal metodo di Gauss-Seidel e da quello di Jacobi.

Esercizio 4

(a) Utilizzando la formula di Lagrange, dopo qualche calcolo si trova

$$p(x) = x^2(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}) + x(-\frac{3a}{2} + 2b - \frac{c}{2}) + a.$$

(b) Risulta

$$p'(x) = 2x(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}) + (-\frac{3a}{2} + 2b - \frac{c}{2}).$$

Affinchè la derivata risulti indipendente da x si deve avere

$$\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2} = 0,$$

ossia

$$b = \frac{a + c}{2}.$$

(c) Se vale la condizione $b = (a + c)/2$, il polinomio $p(x)$ risulta essere di grado minore o uguale 1 e quindi i tre punti sono allineati.

(e) Per il teorema del resto

$$r(x) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) x(x - 1)(x - 2)/3!.$$

Con facilità si ottiene la limitazione superiore

$$\max_{[0,2]} |x(x - 1)(x - 2)| < 2,$$

ma si trova facilmente

$$\max_{[0,2]} |x(x - 1)(x - 2)| = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Dunque

$$\max_{[0,2]} |r(x)| < \frac{\pi^3}{72\sqrt{3}}.$$