Università di Pisa

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

Prova scritta di Calcolo Numerico–Corsi A,B,R

5/2/2007

Esercizio 1 Si consideri il problema del calcolo della funzione $\mathrm{g}(x) = e^{\mathrm{f}(x)}$.

(a) Si dimostri che il coefficiente di amplificazione del calcolo di $\mathrm{g}(x)$ è $c_{\mathrm{g}}(x) = x\mathrm{f}'(x)$.

(b) Si dica se il calcolo di $\mathrm{g}(x)$ è sempre ben condizionato nel caso in cui $\mathrm{f}(x) = \sin x$ e $x \in [0, 1]$.

(c) Si dica se il calcolo di $\mathrm{g}(x)$ è sempre ben condizionato nel caso in cui $\mathrm{f}(x) = \sqrt{x}$ e $x \in [0, 1]$.

(d) Assumendo che il calcolo di $\mathrm{f}(x)$ e della funzione esponenziale siano effettuabili con errore relativo limitabile dalla precisione di macchina u dimostrare che per l'errore algoritmico del calcolo di $\mathrm{g}(x)$ risulta

$$\varepsilon_{\mathrm{alg}} \dot{\le} u(1 + |\mathrm{f}(x)|).$$

Esercizio 2

È assegnata la funzione

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1 - x}{e^x}.$$

(a) Tracciare il grafico di $\mathrm{f}(x)$ individuando in particolare l'ascissa α del punto di intersezione del grafico con l'asse delle ascisse, l'ascissa β del punto di minimo.

(b) Se si sceglie $x_0 < \alpha$ il metodo delle tangenti applicato all'equazione $\mathrm{f}(x) = 0$ genera una successione convergente? Giustificare la risposta.

(c) Se si sceglie $\alpha < x_0 < \beta$ il metodo delle tangenti applicato all'equazione $\mathrm{f}(x) = 0$ genera una successione convergente? Giustificare la risposta.

(d) Se si sceglie $x_0 > \beta$ il metodo delle tangenti applicato all'equazione $\mathrm{f}(x) = 0$ genera una successione convergente? Giustificare la risposta.

(e) In ciascuno dei casi precedenti in cui il metodo risulta convergente indicare, con opportuna giustificazione, l'ordine di convergenza.

Esercizio 3

(a) Si calcoli il polinomio caratteristico della matrice

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Sfruttando il risultato ottenuto al punto precedente scrivere una matrice A il cui polinomio caratteristico sia $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda)$.

(c) Individuare gli autovalori di A.

(d) Dire se A è diagonalizzabile, giustificando la risposta.

Esercizio 4

(a) Si calcoli il polinomio $\mathrm{p}(x)$ di interpolazione dei tre punti $(0, 0)$, $(a, 1)$ e $(1, 0)$, con $0 < a < 1$.

(b) Calcolare le coordinate del massimo di $\mathrm{p}(x)$ nell'intervallo $[0, 1]$.

(c) Cosa accade delle coordinate calcolate nel punto precedente se a tende a zero.

(d) Sia $a = 10^{-2}$ e sia $\mathrm{f}(x)$ una funzione tale che $\mathrm{f}(0) = 0$, $\mathrm{f}(10^{-2}) = 1$, $\mathrm{f}(1) = 0$ e tale che $0 \le \mathrm{f}(x) \le 1$ per $x \in [0, 1]$. Sfruttando la conoscenza delle coordinate del massimo di $\mathrm{p}(x)$, dimostrare che $\max\limits_{[0,1]} |\mathrm{f}(x) - \mathrm{p}(x)| > 24$.

(e) Assumendo che $\mathrm{f}(x)$ sia derivabile tre volte con continuità usare il teorema del resto per dimostrare che

$$\max_{[0,1]} |\mathrm{f}^{(3)}(x)| > 6 \cdot 24.$$